This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

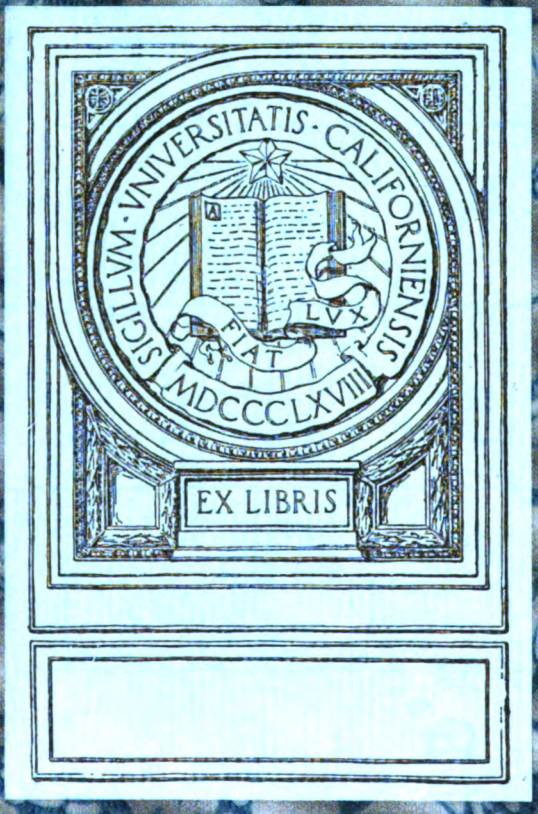
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

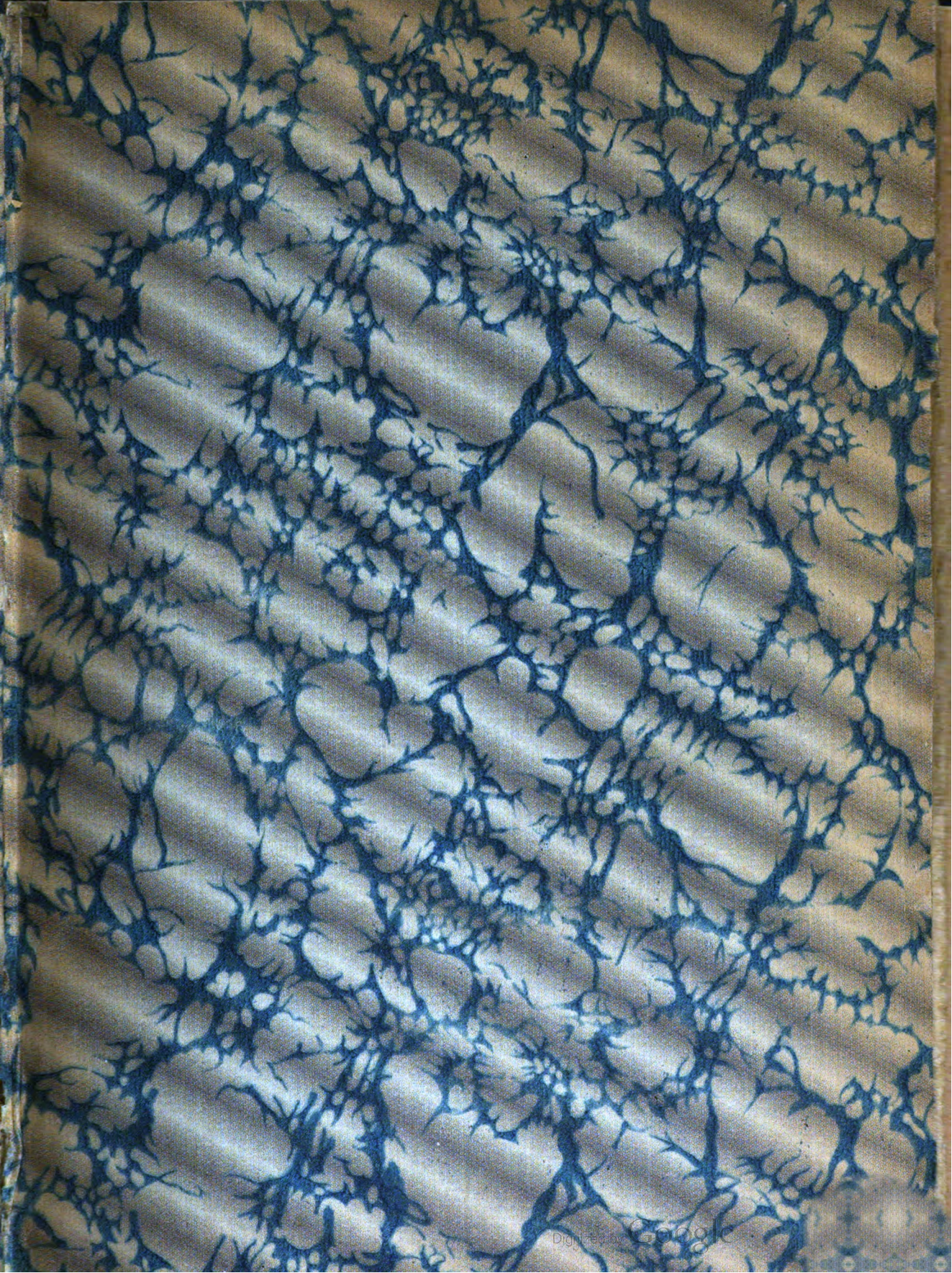
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

UC-NRLF
$B 529 089



Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

EDUCATION DEPT.

Digitized by Google

UNIV. OF CALIFORNIA

ACADÉMIE ROUMAINE
ÉTUDES ET RECHERCHES
I

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE DES RÉSEAUX

PAR

GEORGES TZITZÉICA
Professeur à la Faculté des Sciences de Bucarest,
Membre de l'Académie Roumaine

18

CVLTVRA NAȚIONALĂ

Digitized by Google

UNIV. OF
CALIFORNIA

CA 060

Digitized by Google

PRÉFACE.

La Géométrie différentielle ou infinitésimale étudie les propriétés des figures géométriques dans le voisinage d'un de leurs éléments. C'est ainsi que la tangente à une courbe plane est la droite qui joint un point à un point infiniment voisin, le cercle osculateur passe par trois points infiniment voisins. De même, la demi-quadrique osculatrice à une surface réglée est définie par trois génératrices infiniment voisines de la surface.

La Géométrie différentielle classique, telle qu'elle a été créée par *Euler*, *Monge* et ses élèves, *Gauss*, complétée par *Darboux*, *Weingarten*, *Ribaucour*, *Bianchi*, *Guichard*, etc., comprend, sans distinction, des propriétés métriques et des propriétés projectives.

De temps en temps, il y a eu des géomètres, comme *M. Koenigs*, qui ont étudié de préférence les propriétés des éléments infinitésimaux d'une figure, qui ne changent pas à la suite d'une transformation projective.

On avait aussi considéré certaines méthodes analytiques pour la recherche de ces propriétés. C'est ainsi que *Halphen* avait introduit la notion féconde d'invariants différentiels projectifs pour l'étude des courbes planes ou gauches.

Cependant, c'est à M. *Wilczynski* que revient le mérite d'avoir créé une théorie projective, aussi complète que possible, des propriétés infinitésimales des courbes planes et gauches et des surfaces réglées. Il a employé à cet effet certains invariants et covariants des équations différentielles linéaires ordinaires du troisième et du quatrième ordre et des systèmes d'équations du second ordre. Il a appliqué aussi une méthode analogue à l'étude des surfaces et des congruences de droites de notre espace.

Cette méthode a donné de beaux résultats. Toutefois, les calculs, un peu longs et compliqués, laissent au second plan les propriétés géométriques. Aussi, les études synthétiques de quelques géomètres italiens, surtout celles de *M. Segre*, ont rendu à cette branche de la Géométrie différentielle un aspect plus intuitif, en y ajoutant de plus la considération des figures dans un espace projectif à plus de trois dimensions.

A l'aide de ces méthodes, tant géométriques qu'analytiques, on pouvait entreprendre l'étude systématique des parties les plus intéressantes de la Géométrie

622422

Digitized by Google

différentielle projective. Une de ces théories, dont l'origine analytique remonte jusqu'à *Laplace*, dont la notion géométrique est due à *Dupin*, et les développements ultérieurs à *Darboux* et à tant d'autres géomètres, *la théorie des réseaux*, relie entre elles la plupart des propriétés remarquables, projectives ou métriques, des surfaces et des congruences.

Aussi, je me suis engagé, presque en même temps qu'un jeune et distingué géomètre italien, M. *E. Bompiani*, à la recherche des propriétés générales des réseaux dans un espace à un nombre quelconque de dimensions et de leurs applications aux propriétés infinitésimales des surfaces et des congruences de notre espace.

Une bonne partie des résultats de ces recherches a été publiée sous la forme concise de Notes. En rédigeant cet ouvrage j'ai voulu donner, en même temps, une vue d'ensemble et une mise au point de la théorie projective des réseaux. C'est pourquoi, j'ai été obligé d'introduire plusieurs chapitres élémentaires qui serviront aussi comme une introduction nécessaire pour ceux qui voudront s'initier à cette théorie.

Les calculs, qui ont quelquefois l'air de charger l'exposition, ont à leur base l'intuition géométrique. Chaque équation a, presque toujours, une interprétation sur la figure correspondante, de sorte qu'on peut suivre aisément la suite des calculs.

J'ai appris cette méthode au cours et dans les travaux de *Darboux*. Aussi je prends la permission de dédier cet ouvrage à la mémoire de ce maître incomparable.

Je suis reconnaissant à l'*Académie Roumaine* pour avoir décidé la publication de cet ouvrage dans la collection «*Etudes et recherches*».

Bucarest, le 20 Octobre 1923.

G. TZITZÉICA.

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE
DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE
DES RÉSEAUX

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION.

Géométrie des espaces à plusieurs dimensions.

I. Espaces métriques euclidiens. Espaces projectifs.

1. La notion d'espace à plusieurs dimensions est actuellement familière à tous ceux qui ont dépassé les éléments des mathématiques supérieures. Elle sert habituellement comme langage imagé, pour rendre, en un certain sens, intuitives certaines questions concernant les fonctions à plus de trois variables.

De même que la géométrie analytique du plan et de l'espace est la géométrie à deux et à trois variables, la géométrie de l'espace à n dimensions est la géométrie à n variables.

Le fondement intuitif d'un tel espace est l'analogie des expressions analytiques avec celles que l'on rencontre dans les espaces à deux et à trois dimensions.

Le but de telles recherches n'est pas une généralisation vaine, qui tente naturellement les géomètres, à montrer que ce qui est vrai pour $n = 2$ et 3 l'est aussi pour n quelconque. On étudie les espaces à plusieurs dimensions pour avoir des réponses relatives à notre espace, comme on étudie l'organisation des pays étrangers pour le profit de son propre pays.

Il y a d'ailleurs un autre point de vue qui mérite une attention spéciale. Notre espace a trois dimensions si l'on prend le point ou le plan comme élément générateur, mais il a des dimensions supérieures si l'on prend comme élément une autre figure géométrique. Ainsi, comme nous le verrons plus loin, si l'on prend la droite ou la sphère comme élément générateur, notre espace a quatre dimensions.

Enfin, il y a encore un motif d'actualité qui justifie l'étude des espaces à plus de trois dimensions. Les dernières théories de la Physique, imaginées en partant du principe de relativité, considèrent l'univers des phénomènes comme un espace à quatre dimensions.

2. *Espace euclidien à quatre dimensions.* Bornons-nous tout d'abord à quatre variables x, y, z, t. Un système de valeurs données à ces variables, définit un point M ; les valeurs $x = o$, $y = o$, $z = o$, $t = o$ définissent l'origine O des coordonnées. La totalité des points M constitue *l'espace euclidien à quatre dimensions* E_4.

Digitized by Google

Sans faire une étude systématique des figures que l'on peut imaginer dans cet espace, analogues à celles de notre espace euclidien E_3 à trois dimensions, considérons quelques exemples simples. Une équation linéaire

$$ax + by + cz + dt + e = 0,$$

où les coefficients des variables ne sont pas tous nuls, représente, *par définition*, un *espace linéaire à trois dimensions*, un L_3. On a, en particulier, les quatre espaces fondamentaux $x = o$, $y = o$, $z = o$, $t = o$, qui passent par l'origine.

Deux équations linéaires, dont les coefficients des variables ne sont pas proportionnels, représentent un *espace linéaire à deux dimensions*, un *plan*, ou un L_2: $x = y = o$ représente le plan zOt.

Trois équations linéaires, dont le tableau rectangulaire, formé par les coefficients des variables, a le *rang*[1]) égal à trois, définissent un espace linéaire à une seule dimension, un L_1 ou une *droite*. Les équations $y = z = t = o$ représentent l'axe Ox.

Ces définitions sont claires; elles sont la généralisation naturelle de celles bien connues dans la géométrie de l'espace à trois dimensions. Il en est de même des suivantes.

La distance entre les points M' (x', y', z', t') et M'' (x'', y'', z'', t'') est définie par

$$\overline{M'M''}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 + (t' - t'')^2.$$

On peut dire alors que la totalité des points M (x, y, z, t), dont les coordonnées vérifient l'équation

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 + (t - t_o)^2 - R^2 = 0,$$

où le point M_o (x_o, y_o, z_o, t_o) est fixe et la constante R donnée, définit une sphère à trois dimensions de centre M_o et de rayon R.

Enfin, le groupe des déplacements euclidiens de l'espace E_4 est défini par

$$\begin{aligned} x &= x_o + a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4T, \\ y &= y_o + b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4T, \\ z &= z_o + c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T, \\ t &= t_o + d_1X + d_2Y + d_3Z + d_4T \end{aligned}$$

où le déterminant des a, b, c, d est *orthogonal*. On a une *translation*, lorsque $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 1$ et que les autres coefficients a, b, c, d sont nuls.

3. *Espace projectif.* On définit *analytiquement* les coordonnées projectives d'un point dans un espace quelconque de la même manière que dans notre espace.

Soit E_{n-1} un espace à $n-1$ dimensions, $X_1, X_2 \ldots, X_{n-1}$ les coordonnées (cartésiennes) d'un point quelconque M de cet espace; les coordonnées projectives

[1]) Un tableau rectangulaire est de rang r, s'il a au moins un déterminant d'ordre r différent de zéro et que tout déterminant d'ordre supérieur, s'il y en a, soit nul.

Digitized by Google

x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de M sont, par définition, proportionnelles aux polynomes linéaires

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots + a_{i\,n-1} X_{n-1} + a_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant des coefficients a_{ik} étant différent de zéro.

On peut dire que des valeurs finies et pas toutes nulles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ déterminent un point M, qui ne change pas lorsqu'on multiplie ces quantités par un même facteur fini et différent de zéro. La totalité des points M constitue *l'espace projectif* E_{n-1} à n—1 dimensions; les formules

$$y_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

où le déterminant des a_{ik} est différent de zéro, définissent une *transformation projective* de l'espace E_{n-1}.

II. Espaces linéaires d'un E_{n-1}.

4. Une équation linéaire et homogène par rapport aux coordonnées projectives $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représente un espace linéaire à n—2 dimensions L_{n-2} de l'espace projectif ambiant E_{n-1}; on dit aussi qu'un L_{n-2} est un *hyperplan* de E_{n-1}.

En général p équations linéaires et homogènes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont le tableau des coefficients est de rang p, représente un espace linéaire à $n-p-1$ dimensions, un L_{n-p-1}. En particulier, n—3 équations représentent un L_2, un espace linéaire à deux dimensions ou *un plan*; n—2 équations, toujours linéaires et homogènes, un L_1 ou *une droite*; enfin n—1 équations déterminent un L_0 ou *un point.*

5. *Représentation paramétrique des espaces linéaires.* Nous venons de définir les espaces linéaires d'un espace projectif E_{n-1} à l'aide d'équations linéaires et homogènes. On peut donner pour ces mêmes espaces une autre représentation remarquable à l'aide d'un certain nombre de paramètres.

Prenons directement le cas général d'un L_{n-p-1}, représenté d'abord par un système de $p < n$ équations linéaires de rang p

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \ldots + a_{pn} x_n = 0. \end{cases}$$

Comme on a $p < n$, ce système est compatible, donc l'espace L_{n-p-1} contient au moins un point.

Digitized by Google

Supposons que par un choix convenable des notations le déterminant des coefficients des p premières variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ soit différent de zéro ; ce choix est possible étant donné le rang p du système. Donnons aux autres variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ des valeurs fixes pas toutes nulles $x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n$ et résolvons le système par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$. On obtient ainsi un point x' $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ de l'espace L_{n-p-1} représenté par les équations (1).

En partant d'un autre groupe de valeurs $x''_{p+1}, x''_{p+2}, \ldots, x''_n$ des variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, on obtiendra un autre point x'' $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ du même espace et ainsi de suite. On pourra obtenir ainsi autant de points que l'on voudra de l'espace L_{n-p-1}. Cependant il y a une distinction à faire entre tous ces points ; ils ne sont pas tous indépendants les uns des autres.

En effet, si les points distincts x' et x'' appartiennent au L_{n-p-1} représenté par (1), il en est évidemment de même des points y définis par

$$y_i = c' x'_i + c'' x''_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

c' et c'' étant des constantes arbitraires, qui ne sont pas nulles en même temps. Nous dirons que les points y *dépendent linéairement de x' et de x''*.

En supposant les points x', x'' et x''' *linéairement indépendants*, les points z définis par

$$z_i = c' x'_i + c'' x''_i + c''' x'''_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dépendent linéairement de x', x'' et x''' et si les derniers appartiennent au L_{n-p-1} représenté par (1), on vérifie aisément qu'il en est de même de z, et ainsi de suite.

Il s'agit maintenant de faire voir que tout point de ce L_{n-p-1} dépend linéairement d'un certain nombre de points fixes du même espace.

A cet effet nous remarquerons tout d'abord qu'étant donnés r points x', x'', $\ldots$, $x^{(r)}$ de l'espace projectif E_{n-1}, si le tableau

$$T = \left\| \begin{array}{cccc} x'_1 & x''_2 & \ldots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \ldots & x''_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x^{(r)}_1 & x^{(r)}_2 & \ldots & x^{(r)}_n \end{array} \right\|, \quad r \leqslant n$$

est de rang r, les points considérés sont sûrement linéairement indépendants. Effectivement, si les points dépendaient linéairement, cela signifierait que l'on pourrait trouver des constantes c', c'', $\ldots$, $c^{(r)}$ pas toutes nulles, telles que l'on ait

$$c' x'_i + c'' x''_i + \ldots + c^{(r)} x^{(r)}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n ;$$

mais alors tous les déterminants d'ordre r du tableau T seraient nuls et le rang de T serait moindre que r.

Cela étant, je dis que l'on peut déterminer $n-p$ points appartenant à l'espace linéaire L_{n-p-1} défini par le système (1) et qui soient linéairement indépendants.

Digitized by Google

En effet on n'a qu'à choisir les coordonnées $x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n$; $x''_{p+1}, x''_{p+2}, \ldots, x''_n$; ..... ; $x_{p+1}^{(n-p)}, x_{p+2}^{(n-p)}, \ldots, x_n^{(n-p)}$ de manière que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x'_{p+1} & x'_{p+2} & \ldots & x'_n \\ x''_{p+1} & x''_{p+2} & \ldots & x''_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x_{p+1}^{(n-p)} & x_{p+2}^{(n-p)} & \ldots & x_n^{(n-p)} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Alors le tableau

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \ldots & x''_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x_1^{(n-p)} & x_2^{(n-p)} & \ldots & x_n^{(n-p)} \end{vmatrix}$$

est de rang $n-p$ et par conséquent, selon la remarque précédente, les points x', x'', ..., $x^{(n-p)}$ sont linéairement indépendants.

Tous ces préliminaires étant établis, nous pouvons démontrer maintenant que tout point $x\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace L_{n-p-1} dépend linéairement des $n-p$ points choisis. En effet, en vertu de l'hypothèse faite sur le déterminant D, on peut déterminer $n-p$ constantes c de manière que l'on ait

$$(2) \quad \begin{cases} x_{p+1} = c'\, x'_{p+1} + c''\, x''_{p+1} + \ldots + c^{(n-p)}\, x_{p+1}^{(n-p)} \\ x_{p+2} = c'\, x'_{p+2} + c''\, x''_{p+2} + \ldots + c^{(n-p)}\, x_{p+2}^{(n-p)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c'\, x'_n + c''\, x''_n + \ldots + c^{(n-p)}\, x_n^{(n-p)} \end{cases}$$

Comme les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ du point x de L_{n-p-1} sont déterminées par le système (1) du moment que $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ sont connues et comme, d'autre part, ce système est évidemment vérifié par

$$X_1, X_2, \ldots, X_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n,$$

où les X_i sont définis par

$$X_i = c'\, x'_i + c''\, x''_i + \ldots + c^{(n-p)}\, x_i^{(n-p)}, \quad i = 1, \ldots 2, p$$

et les x_i $(i = p+1, p+2, \ldots, n)$ ont les expressions (2), il résulte que l'on a nécessairement $X_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Donc, si les paramètres c', c'', ..., $c^{(n-p)}$ prennent toutes les valeurs finies possibles — sans être en même temps nulles —, le point x dont les coordonnées sont

$$(3) \quad x_i = c'x'_i + c''x''_i + \ldots + c^{(n-p)}x_i^{(n-p)}, \quad i=1, 2, \ldots, n$$

décrit l'espace linéaire L_{n-p-1} défini par (1). Les expressions (3) donnent la *représentation paramétrique* de cet espace.

Digitized by Google

La représentation paramétrique d'un espace linéaire L_{n-p-1} à $n-p-1$ dimensions peut être faite d'une infinité de manières, parce que on peut faire d'une infinité de manières le choix de $n-p$ points linéairement indépendants d'un tel espace.

Pour $p = n-2$ on a

$$x_i = c' x'_i + c'' x''_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

comme représentation paramétrique de la droite $x'x''$, où x' et x'' sont deux points distincts de la droite.

Pour $p = n-3$, on a

$$x_i = c' x'_i + c'' x''_i + c''' x'''_i, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

comme représentation paramétrique du plan $x'x''x''$, les points x', x'' et x''' n'étant pas en ligne droite.

Finalement, on peut remarquer que les $n-p$ paramètres c des coordonnées (3) du point x, sont les coordonnées projectives de ce point dans l'espace linéaire L_{n-p-1} comme espace ambiant et par rapport à x', x'', $\ldots$, $x^{(n-p)}$ comme *points fondamentaux.*

III. Espaces quadratiques et dualité dans un E_{n-1}.

6. Une relation homogène

$$F(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0$$

entre les coordonnées projectives d'un point mobile x $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définit un espace (on dit encore une *multiplicité* ou une *variété*) à $n-2$ dimensions de l'espace ambiant E_{n-1}. Si la relation est du second degré, on a un *espace quadratique* Q_{n-2} à $n-2$ dimensions de E_{n-1}. Soit

$$(4) \quad \sum_1^n a_{ik} x_i x_k = 0, \quad a_{ik} = a_{ki}$$

l'équation d'un tel espace. L'intersection avec la droite $x'x''$ est déterminée à l'aide de

$$\Sigma a_{ik} (c' x'_i + c'' x''_i) (c' x'_k + c'' x''_k) = 0$$

ou

$$(5) \quad c'^2 \Sigma a_{ik} x'_i x'_k + 2 c' c'' \Sigma a_{ik} x'_i x''_k + c''^2 \Sigma a_{ik} x''_i x''_k = 0,$$

qui donne, en général, deux valeurs pour le rapport des constantes c', c'' de la représentation paramètrique

$$x_i = c' x'_i + c'' x''_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

de la droite $x'x''$. On a trois cas à considérer:

Digitized by Google

a) L'équation (5) a par rapport à $c' : c''$ ou $c'' : c'$ deux racines *distinctes*: la droite $x'x''$ *coupe*[1]) l'espace quadratique Q_{n-2} en deux points (distincts).

b) Les racines de (5) sont égales: la droite $x'x''$ este *tangente* à l'espace Q_{n-2}.

c) L'équation (5) est identique (elle est vérifiée quelles que soient les valeurs de c' et c''): la droite $x'x''$ est une *génératrice* (rectiligne) de Q_{n-2}.

7. L_{n-2} *tangent à un espace quadratique de* E_{n-1}. Si le point x' appartient à l'espace Q_{n-2} représenté par (4), on a

$$\Sigma a_{ik} x'_i x'_k = 0$$

et la condition pour que la droite $x'x''$ soit tangente à Q_{n-2} devient

$$\Sigma a_{ik} x'_i x''_k = 0.$$

Il résulte de là que toutes les tangentes à Q_{n-2} au point x' sont situées dans l'espace linéaire à n—2 dimensions

$$(6) \quad \Sigma a_{ik} x'_i x_k = 0$$

que nous appellerons le L_{n-2}-*tangent* de l'espace Q_{n-2} au point x'. En général un espace quadratique Q_{n-2} de E_{n-1} admet en chacun de ses points un hyperplan ou un L_{n-2}-tangent déterminé.

8. *Points singuliers d'un espace quadratique.* Il est possible qu'en un point x' de Q_{n-2} le L_{n-2}-tangent de cet espace ne soit pas déterminé. Un tel point, s'il existe, est dit *point singulier* de Q_{n-2}.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que x' soit point singulier de Q_{n-2} sont, d'abord

$$\Sigma a_{ik} x'_i x'_k = 0,$$

ensuite

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{ik} x'_i = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ces dernières n relations entraînent la première; elles montrent que, en général, un espace quadratique Q_{n-2} n'a pas de points singuliers. Pour que Q_{n-2} ait au moins un point singulier, il faut et il suffit que le déterminant a du système linéaire (7) soit nul.

D'une manière plus précise tous les cas d'existence de points singuliers pour Q_{n-2} sont compris dans la proposition suivante:

Si le rang du déterminant a — discriminant de la forme quadratique qui est le premier membre de (4) — *est* $r<n$, *le système* (7) *se réduit à* r *équations, qui représentent dans* E_{n-1} *un espace linéaire* L_{n-r-1} *à* $n-r-1$ *dimensions. Tout point* x' *de cet espace linéaire est point singulier de* Q_{n-2}.

[1]) Nous ne faisons pas de distinction entre les points réels et imaginaires.

Digitized by Google

On sait, d'après la théorie des formes quadratiques, que si le rang de a est $r < n$, l'équation (4) peut être ramenée, par une transformation linéaire des variables, à la forme

$$\sum_1^r x_i^2 = 0$$

Alors, si $r < n$, l'espace linéaire L_{n-r-1}, formé par les points singuliers de Q_{n-2}, est déterminé par

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0;$$

si $r = n$, Q_{n-2} n'a plus de point singulier. Dans le premier cas ($r < n$) nous dirons que Q_{n-2} est un *espace quadratique singulier*, dans le second ($r = n$) que c'est un espace quadratique non-singulier.

9. *Espaces linéaires conjugués par rapport à un espace quadratique.* Considérons tout d'abord la représentation paramétrique

$$(8) \quad x_i = c' x'_i + c'' x''_i , \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

de la droite $x'x''$. Nous dirons de deux points x et y de cette droite qu'ils sont conjugués harmoniques ou simplement *conjugués* par rapport à x' et x'', s'ils correspondent à des valeurs égales et de signes contraires du rapport $c' : c''$, c'est-à-dire, x étant défini par (8), on a pour y (à un facteur près, que nous laissons de côté)

$$(9) \quad y_i = c' x'_i - c'' x''_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Comme des relations (8) et (9) on tire

$$2 c' x'_i = x_i + y_i , \ 2 c'' x''_i = x_i - y_i , \ i = 1, 2, \ldots, n ,$$

qui donnent les représentations paramétriques de x' et x'' à l'aide des points x et y, il résulte que x' et x'' sont, eux aussi, conjugués par rapport à x et y.

Cela étant posé, revenons à l'équation (5) qui donne les points d'intersection de la droite $x'x''$ avec l'espace Q_{n-2} et supposons que les points x' et x'' soient conjugués par rapport à ces points d'intersection. Nous dirons alors que x' et x'' sont *conjugués* par rapport à l'espace quadratique Q_{n-2}. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'on ait

$$(10) \quad \Sigma a_{ik} x'_i x''_k = 0$$

et

$$\Sigma a_{ik} x'_i x'_k \neq 0 , \qquad \Sigma a_{ik} x''_i x''_k \neq 0 .$$

Nous étendrons la définition des points conjugués en nous bornant à la relation (10) et en supprimant les dernières inégalités.

Pour plus de simplicité nous supposerons dans ce qui suit que l'espace Q_{n-2} n'est pas singulier et que son équation est prise sous la forme réduite

Digitized by Google

$$\sum_1^n x^2_i = 0 .$$

La condition pour que les points x' et x'' soient conjugués par rapport à Q_{n-2} devient maintenant

$$\Sigma\, x'_i\, x''_i = 0 .$$

Il resulte de là que les points conjugués d'un point x' donné sont tous situés dans l'espace linéaire L_{n-2}

$$\Sigma\, x'_i\, x_i = 0$$

et réciproquement tout point de ce L_{n-2} est conjugué de x'. On dit que le point x' — ou le L_0 — et le L_{n-2} précédent sont *conjugués* par rapport à Q_{n-2}.

Considérons, d'une manière générale, le L_{r-1} déterminé par les r points x', x'', ..., $x^{(r)}$ linéairement indépendants. Les r espaces L_{n-2}

$$(11)\quad \Sigma\, x'_i\, x_i = 0, \quad \Sigma\, x''_i\, x_i = 0, \ \ldots\ , \quad \Sigma\, x^{(r)}_i\, x_i = 0$$

conjugués de ces points définissent un espace linéaire L_{n-r-1}. Il est facile de vérifier que le L_{n-2} conjugué de tout point du L_{r-1} donné passe par le L_{n-r-1} représenté par le système (11). Nous dirons de ces espaces linéaires L_{r-1} et L_{n-r-1} qu'ils sont *conjugués* par rapport à l'espace quadratique Q_{n-2}.

10. *Dualité.* La théorie précédente des espaces linéaires conjugués par rapport à un espace quadratique Q_{n-2} de E_{n-1} permet de faire correspondre à une figure linéaire F, c'est-à-dire à une figure composée d'espaces linéaires L_p ($p = 0, 1, 2, \ldots, n-2$), une autre figure linéaire F'. A tout espace linéaire L_p de F, correspond l'espace linéaire conjugué L_{n-p-2} de F'. Si plusieurs espaces linéaires de F ont un espace linéaire commun L_q, les espaces linéaires correspondants de F' ont en commun l'espace linéaire L_{n-q-2} conjugué de L_q.

On a ainsi, sous la forme la plus simple, analogue à la transformation par polaires réciproques de notre espace, le *principe de dualité* de l'espace E_{n-1}. Il sera complété plus loin pour les figures curvilignes.

IV. Coordonnées d'une droite de E_3. Complexes, congruences, séries linéaires et ensembles linéaires.

11. *Historique.* La science a une vie propre, c'est une sorte d'organisme; elle se développe presque d'elle-même. Aussi il est très difficile de mettre des noms propres, même sur les découvertes importantes.

Il en est ainsi, par exemple, pour l'idée fondamentale de la géométrie moderne de considérer l'espace projectif à trois dimensions comme *espace réglé*, comme espace engendré par une droite mobile.

Digitized by Google

On dit d'habitude et il est incontestable que c'est *Plücker*, qui, après avoir considéré la droite comme élément générateur du plan, le plan comme élément générateur de l'espace, a pris, en 1846 (*System der Geometrie des Raumes*), la droite comme élément générateur de l'espace. Cependant on peut soutenir avec juste raison, que la notion d'espace réglé est née le jour où, en dépassant l'idée élémentaire de surface réglée, c'est-à-dire de configuration formée d'une simple infinité (∞^1) de droites, on a considéré les *congruences* de droites, c'est-à-dire les configurations composées d'une double infinité (∞^2) de droites et les *complexes* de droites, c'est-à-dire les configurations formées d'une triple infinité (∞^3) de droites. Dans ce cas c'est le profond et fécond géomètre *Monge* qui a créé la notion générale de congruence de droites (*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, en 1781), et son élève *Malus* qui a créé la notion générale de complexe de droites(*Optique*, en 1808) ; ce sont eux que l'on peut considérer comme les fondateurs de la géométrie réglée.

On a les mêmes difficultés pour établir d'une manière précise qui a imaginé le premier les coordonnées d'une droite de notre espace. Il est vrai que c'est *Plücker* qui, après avoir introduit les coordonnées d'une droite du plan, les coordonnées d'un plan de l'espace, a imaginé aussi des coordonnées pour une droite de l'espace. En prenant d'abord les équations de la droite sous la forme

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

il a considéré (en 1846) comme coordonnées de la droite les quatre coefficients r, ϱ, s et σ. Ce n'est que plus tard (en 1865) qu'il a ajouté une cinquième coordonnée

$$\eta = r\sigma - s\varrho.$$

C'est cependant *Grassmann* qui a défini pour la première fois (en 1844) les coordonnées d'un espace linéaire L_{r-1} ($r < n$) appartenant à un espace projectif E_{n-1}, à l'aide de r points linéairement indépendants de ce L_{r-1}. Pour $n = 4$ et $r = 2$ on a les six coordonnées homogènes, retrouvées plus tard par *Cayley* (en 1859), que l'on emploit couramment dans la géométrie réglée et dont nous nous servirons souvent au cours de cet ouvrage.

12. *Coordonnées de la droite.* Soient x (x_i, $i = 1, 2, 3, 4$) et y (y_i, $i = 1, 2, 3, 4$) deux points quelconque distincts de la droite xy. Les coordonnées de cette droite sont, par définition, les six déterminants différents du tableau

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

à savoir, les expressions

$$p_{ik} = x_i\, y_k - x_k\, y_i\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

dont il n'y a que six de différentes: p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}. D'ailleurs on a

$$p_{ii} = 0\,, \quad p_{ik} = -p_{ki}.$$

Digitized by Google

Entre les coordonnées p_{ik} il y a une relation quadratique, que l'on obtient en développant, selon le théorème de Laplace, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$(12) \quad p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0.$$

Comme les p_{ik} sont par leur définition homogènes, on voit qu'en réalité ces coordonnées se réduisent à quatre: il y a ∞^4 droites dans l'espace, ou encore *l'espace réglé a quatre dimensions.*

Nous avons défini les coordonnées p_{ik} à l'aide de deux points particuliers x et y de la droite xy. Prenons-en deux autres x' et y'. On a

$$x'_i = x_i + \lambda y_i, \quad y'_i = x_i + \mu y_i, \quad \lambda \neq \mu, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

donc

$$p'_{ik} = x'_i y'_k - x'_k y'_i = (\mu - \lambda)\, p_{ik}$$

et on voit que les nouvelles coordonnées p'_{ik}, définies à l'aide des points x' et y' ne sont pas essentiellement distinctes des p_{ik}.

On peut donner une interprétation géométrique des coordonnées p_{ik}. Supposons que la droite xy ne soit pas située dans le plan $x_1 = 0$, elle coupe donc ce plan en un point que nous prendrons pour le point x. On a alors

$$p_{i1} = x_i y_1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

qui prouvent que ces quatre quantités sont les coordonnées projectives du point commun à la droite et au plan $x_1 = 0$. En général p_{ik} $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont les coordonnées du point où la droite coupe le plan $x_k = 0$.

Réciproquement, six quantités p_{ik}, pas toutes nulles, vérifiant la relation (12) déterminent une droite de l'espace. Supposons en effet que l'on ait $p_{12} \neq 0$ et considérons les points distincts: $x\,(0, p_{21}, p_{31}, p_{41})$ et $y\,(p_{12}, 0, p_{32}, p_{42})$. Les coordonnées p'_{ik} de la droite xy sont alors en vertu de (12)

$$p'_{ik} = p_{12}\,p_{ik}, \; i \neq k = 1, 2, 3\,4,$$

qui prouvent bien que les coordonnées de la droite xy sont p_{ik}.

13. *Condition pour que deux droites se coupent.* Pour la géométrie de la droite c'est une question fondamentale de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites D et D' se coupent ou soient dans le même plan.

Si D (p_{ik}) et D' (p'_{ik}) se coupent, elles définissent un faisceau plan. Soit D'' (p''_{ik}) une droite quelconque de ce faisceau. D, D' et D'' coupent le plan

Digitized by Google

$x_4 = 0$, par exemple, en trois points situés sur une même droite, on peut donc prendre

$$p''_{14} = p_{14} + \lambda p'_{14}, \quad p''_{24} = p_{24} + \lambda p'_{24}, \quad p''_{34} = p_{34} + \lambda p'_{34}.$$

En coupant le faisceau avec le plan $x_3 = 0$, on a

$$p''_{13} = \alpha p_{13} + \beta p'_{13}, \quad p''_{23} = \alpha p_{23} + \beta p'_{23}, \quad p''_{43} = \alpha p_{43} + \beta p'_{43}.$$

En comparant les dernières coordonnées, on a nécessairement $\alpha = 1$, $\beta = \lambda$. On trouve ainsi que les coordonnées de D'' sont

$$(13) \quad p''_{ik} = p_{ik} + \lambda p_{ik}, \; i \neq k = 1, 2, 3, 4.$$

On a ainsi le résultat suivant:

Si les droites D *et* D' *déterminent un faisceau, les expressions* (13) *sont, quelque soit* λ, *les coordonnées d'une droite de ce faisceau.*

Si nous désignons par P (p) le premier membre de (12), on a, si D et D' se coupent,

$$P(p + \lambda p') = 0$$

quelque soit λ. Comme $P(p) = P(p') = 0$, il résulte que la forme polaire

$$P(p \mid p') = p_{12} p'_{34} + p_{13} p'_{42} + p_{14} p'_{23} + p_{34} p'_{12} + p_{42} p'_{13} + p_{23} p'_{14}$$

est nulle. Donc:

Si D *et* D' *se coupent, on a*

$$P(p \mid p') = 0.$$

Je dis que réciproquement si l'on a deux droites dont les coordonnées vérifient cette relation, ces droites sont dans le même plan.

Supposons en effet $p_{12} p'_{12} \neq 0$ et prenons les points d'intersections de ces droites avec les plans $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. Il s'agit de démontrer que les quatre points obtenus sont dans un même plan, ou encore que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & p_{21} & p_{31} & p_{41} \\ p_{12} & 0 & p_{32} & p_{42} \\ 0 & p'_{21} & p'_{31} & p'_{41} \\ p'_{12} & 0 & p'_{32} & p'_{42} \end{vmatrix}$$

est nul. Or, en développant selon le théorème de Laplace et en tenant compte de $P(p) = P(p') = 0$, on obtient

$$p_{12} p'_{12} P(p \mid p') = 0.$$

14. *Image d'une droite dans un* E_5. Les six coordonnées p_{ik} d'une droite peuvent être regardées comme les coordonnées projectives d'un point p d'un espace projectif E_5 à cinq dimensions. Ce point p de E_5 sera, par définition, *l'image* de la droite dans l'espace E_5. Comme entre les p_{ik} il y a la relation (12) à discriminant

Digitized by Google

différent de zéro, il résulte que le point p est situé sur un espace quadratique non singulier Q_4 à quatre dimensions. Réciproquement, tout point de l'espace quadratique Q_4 est l'image d'une droite de notre espace projectif E_3.

Le paragraphe précédent (no. 13) prouve que la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites se coupent est que leurs images p et p' soient situées sur une même génératrice rectiligne de Q_4, c'est-à-dire que la droite $p\,p'$ appartienne entièrement à Q_4.

15. *Coordonnées de Klein.* Si l'on applique aux coordonnées p_{ik} une transformation linéaire à déterminant différent de zéro, on peut ramener la relation quadratique (12) à toute autre relation quadratique à discriminant différent de zéro, en particulier à une relation dont le premier membre est une somme de six carrés. Si nous désignons par x_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) les nouvelles coordonnées de la droite, on a

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0.$$

On appelle les x_i, *coordonnées de Klein*, parce que c'est M. *Klein* qui les a introduites dans la géométrie réglée et en a donné l'interprétation géométrique.

La condition pour que deux droites x et y se coupent, devient maintenant

$$\Sigma\, x\, y = 0,$$

où, pour plus de simplicité, nous avons supprimé les indices. Remarquons que dans ce cas la droite z de coordonnées $z_i = x_i + \lambda\, y_i$ appartient au faisceau déterminé par x et y. On a ainsi le résultat suivant:

L'image d'un faisceau de droites de E_3 *est une génératrice rectiligne de* Q_4, *chaque point de la génératrice étant l'image d'une droite du faisceau.*

Les droites x et y étant dans un même plan, soit z une droite n'appartenant pas au faisceau déterminé par elles, mais les rencontrant toutes les deux. Ceci peut arriver de deux manières différentes, ou bien z est situé dans le plan des droites x et y, ou bien elle passe par leur point commun. Dans les deux cas, toute droite t qui rencontre les trois droites données x, y et z, a pour coordonnées

$$t_i = \lambda\, x_i + \mu\, y_i + \nu\, z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 6;$$

en effet t fait partie du faisceau déterminé par z et par une droite du faisceau xy.

On voit de là que les droites t ont pour images les points de l'espace linéaire L_2 ou du plan défini par les points linéairement indépendants x, y, z. Ce plan appartient entièrement à Q_4.

16. *Complexes linéaires.* Considérons, de la totalité des droites de E_3, celles qui vérifient[1]) une équation du premier degré

$$\Sigma\, a_i\, x_i = 0$$

[1]) Cette manière abrégée de s'exprimer est claire et nous l'emploierons souvent.

Digitized by Google

ou, en supprimant les indices,

$$(14) \quad \Sigma a x = 0.$$

Nous dirons qu'elles forment un *complexe linéaire.*

C'est *Giorgini* (Memorie di mat. della soc. ital. delle scienze, Modena, 1827) qui a considéré pour la première fois un complexe linéaire, mais ce sont *Möbius* (en 1833) et *Chasles* (en 1837) qui en ont étudié, à différents points de vue, les propriétés essentielles.

Les images des droites du complexe linéaire (14) sont les points de E_5 situés dans l'espace C_3, intersection de l'espace quadratique

$$(Q_4) \quad \Sigma x^2 = 0$$

par l'espace linéaire L_4 représenté par (14). Nous dirons de cet espace C_3 que c'est *la première image* du complexe.

Prenons le point $a\,(a_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6)$, conjugué par rapport à Q_4 du L_4 représenté par (14). Lorsque le complexe linéaire est donné, le point a est déterminé et réciproquement. Nous dirons de a que c'est *la seconde image* du complexe.

On voit que la seconde image d'un complexe linéaire donne une interprétation géométrique aux points de l'espace E_5 qui ne sont pas situés dans l'espace Q_4.

17. Si le point a appartient à Q_4, c'est-à-dire si l'on a

$$A = \Sigma a^2 = 0,$$

il est l'image d'une droite a de E_3, et (14) exprime que les droites du complexe rencontrent toutes cette droite fixe et réciproquement. Le complexe linéaire, qui dans ce cas particulier s'appelle *complexe spécial*, se compose de toutes les droites qui coupent la droite a, *la droite singulière du complexe.*

Les propriétés géométriques d'un complexe spécial sont manifestes. Les droites du complexe, qui passent par un point M de E_3 qui n'appartient pas à la droite singulière a, forment un faisceau, dont le plan est déterminé par M et a. Si M est sur a, toute droite passant par M appartient au complexe.

De même, les droites du complexe appartenant à un plan P qui ne contient pas a forment un faisceau dont le sommet est le point commun de P et de a. Si P contient a, toute droite de P appartient au complexe.

Remarques. 1. La droite singulière d'un complexe spécial appartient à ce complexe en vertu de $A = 0$.

2. L'équation (14) représente, si $A = 0$, un L_4 tangent à Q_4 en a.

18. Si a est la seconde image d'un complexe linéaire quelconque (a) et le point b de Q_4 l'image d'une droite, la droite $a\,b$ de E_5 coupe Q_4 en un autre point b', image d'une autre droite de E_3.

Il est aisé de voir géométriquement les relations des droites b et b' par rapport au complexe, mais il est plus facile de les exposer analytiquement.

Digitized by Google

Soient a_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ les coordonnées de a avec $A = \Sigma a^2 \neq 0$ ou $= 0$, b_i celles de b avec $B = \Sigma b^2 = 0$, on aura pour b'_i, coordonnées de b', des quantités proportionnelles à $a_i + \lambda b_i$, où λ doit être déterminé de manière à avoir

$$0 = \Sigma (a + \lambda b)^2 = \Sigma a^2 + 2\lambda \Sigma a b .$$

On peut donc prendre

$$(25) \quad b'_i = 2 a_i \Sigma a b - b_i \Sigma a^2 , \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

D'après la définition géométrique dans l'espace E_5, les points b et b' ont une situation réciproque par rapport au point a. *Les droites correspondantes b et b' de E_3 sont dites conjuguées par rapport au complexe linéaire (a).*

Il résulte de (25) que si le complexe (a) est spécial et que la droite b est distincte de la droite singulière a du complexe, la droite conjuguée b' se confond avec a.

Si $A \neq 0$ et que b appartient au complexe $(\Sigma a b = 0)$, alors b' se confond avec b et ceci arrive seulement dans ce cas[1]).

Si les droites conjuguées b et b' sont distinctes, toute droite du complexe qui coupe l'une, coupe aussi l'autre. Il faut prouver que si l'on a $\Sigma a c = 0$, $\Sigma b c = 0$, on a aussi $\Sigma b' c = 0$, ce qui est évident.

On démontre de la même manière que *toute droite qui rencontre b et b', appartient au complexe.*

19. *Par chaque point de l'espace E_3 il passe une infinité de droites du complexe linéaire (a) formant un faisceau.* Bien entendu nous supposons $A \neq 0$, car le cas $A = 0$ a déjà été examiné (no. 17).

Menons par le point M de E_3 une droite arbitraire b, n'appartenant pas au complexe. Toutes les droites passant par M et s'appuyant sur la conjuguée b' de b appartiennent au complexe. Il s'agit de faire voir que, en dehors de ce faisceau, il n'a y pas d'autre droite du complexe passant par M.

Soit a une telle droite. Je dis qu'alors toute droite δ qui passe par M appartient au complexe. En effet δ appartient au faisceau déterminé par a et par une certaine droite du faisceau précédent, ce qui suffit pour prouver que δ appartient au complexe. Or cette circonstance ne peut se présenter que si (a) est spécial et que M appartient à la droite singulière du complexe. Prenons en effet une droite quelconque d de l'espace, n'appartenant pas au complexe. Sa conjuguée d' passe nécessairement par M, car les droites qui passent par ce point et s'appuyent sur d appartiennent au complexe, comme toute droite passant par M d'ailleurs. Or d' fait alors partie du complexe, ce qui est absurde, car on a

$$d'_i = 2 a_i \Sigma a d - d_i \Sigma a^2$$

---

[1]) Si b et b' se coupent, on a $\Sigma b b' = 0$, donc $\Sigma a b = 0$, qui prouve que b appartient au complexe et n'est plus distincte de b' (dans le cas $A \neq 0$).

Digitized by Google

donc

$$\Sigma a a' = \Sigma a^2 \times \Sigma a d \neq 0$$

Σa^2 et $\Sigma a d$ étant différentes de zéro.

On démontrerait de la même manière la proposition suivante:

Dans chaque plan de l'espace il y a une infinité de droites du complexe formant un faisceau.

Un complexe linéaire non spécial définit ainsi dans l'espace E_3 une dualité de nature spéciale, faisant correspondre à chaque point un plan qui y passe, à chaque plan un point situé sur lui, à chaque droite une droite ne la coupant pas.

20. *Congruences linéaires.* Considérons les droites communes à deux complexes linéaires

$$(26) \quad \Sigma a x = 0, \quad \Sigma b x = 0.$$

On dit qu'elles forment une *congruence linéaire.* L'image de ces droites se trouvent à l'intersection de Q_4 par le L_3 représenté par (26).

On a pour les congruences linéaires, comme pour les complexes linéaires, une *seconde image* plus intuitive, c'est la droite δ qui joint les points a et b, images des complexes (26). Tout point de δ est la seconde image d'un complexe linéaire qui contient toutes les droites de la congruence. On peut déterminer la congruence par deux points quelconque de δ.

On a alors trois cas, selon que δ coupe Q_4 en deux points distincts, en deux points confondus, ou bien si elle est une génératrice de Q_4. Le second cas est une limite du premier, aussi nous ne considèrerons que le premier et le troisième.

Dans le premier cas les droites de la congruence appartiennent à deux complexes linéaires spéciaux; elles rencontrent donc deux droites fixes, — les droites singulières de ces complexes, — qu'on appelle *les directrices*[1]) de la congruence.

Dans le dernier cas tous les complexes qui contiennent la congruence sont spéciaux et les droites singulières de deux quelconques d'entre eux se coupent. Les droites de la congruence, rencontrant ces deux droites, sont situées ou dans leur plan ou bien elles passent par leur point commun. Ce plan et ce point sont *le plan singulier* et *le point singulier* de la congruence qui est singulière.

Par tout point non-singulier et dans tout plan non-singulier il passe une seule droite de la congruence.

21. *Séries linéaires.* Les droites communes à trois complexes linéaires

$$(27) \quad \Sigma a x = 0, \quad \Sigma b x = 0, \quad \Sigma c x = 0$$

linéairement indépendants forment une *série linéaire.* Les images de ces droites sont à l'intersection de Q_4 par le plan (le L_2) représenté par (27). Cette intersection constitue *la première image* de la série linéaire. La seconde image est le plan *abc*,

[1]) On devrait les appeller plutôt les *droites focales* de la congruence.

Digitized by Google

déterminé par les images a, b, c des trois complexes (27). Tout point du plan abc est l'image d'un complexe linéaire contenant la série linéaire. Parmi ces points il y en a une infinité sur Q_4. On peut supposer que a, b, c sont parmi ceux-là. Nous supposerons de plus que ab, bc, ca ne sont pas des génératrices rectilignes de Q_4.

Les droites de la série linéaire rencontrent toutes les trois droites dont les images sont a, b, c; elles forment une *demi-quadrique*, c'est-à-dire elles sont une des familles de génératrices rectilignes d'une surface du second ordre.

L'autre famille (la demi-quadrique *complémentaire*) a pour image l'intersection de Q_4 par le plan abc.

On a ainsi le résultat suivant:

Les images des deux familles de génératrices rectilignes d'une surface du second ordre sont les intersections de Q_4 *par deux plans* (L_2) *conjugués par rapport à cet espace quadratique.*

22. *Ensembles linéaires.* Les droites communes à quatre complexes

$$(28) \quad \Sigma a x = 0, \quad \Sigma b x = 0, \quad \Sigma c x = 0, \quad \Sigma d x = 0$$

linéairement indépendants forment un *ensemble linéaire*. Les images de ces droites sont à l'intersection de Q_4, par la droite (le L_1) représentée par (28), donc, en général, un ensemble linéaire est composé de deux droites (distinctes ou confondues). Le cas singulier est celui où la droite (28) est une génératrice de Q_4.

La seconde image de l'ensemble linéaire est formée par le L_3 déterminé par les quatre points a, b, c, d, images des complexes (28). Ce L_3 est conjugué par rapport à Q_4 de la droite représentée dans E_5 par le système (28). Tout point de l'espace $abcd$ à trois dimensions est l'image d'un complexe linéaire contenant l'ensemble. Si l'on prend les points a, b, c, d à l'intersection de Q_4 par l'espace $abcd$, on voit que les deux droites de l'ensemble linéaire coupent les quatre droites ayant pour images a, b, c et d.

D'ailleurs toutes les droites qui coupent les deux droites de l'ensemble linéaire forment une congruence linéaire, dont la première image est à l'intersection de Q_4 par l'espace $abcd$ et dont la seconde image est la droite (28).

V. Coordonnées pentasphériques. Sphères. Cercles.

23. *Historique.* Les configurations de cercles dans le plan, de sphères et de cercles dans l'espace ont été étudiées à deux points de vue, élémentaire et transcendant. Si nous laissons de côté le travail remarquable, mais isolé, de *Mascheroni* (*La geometria del compasso*, Pavia, 1797), les deux points de vue ont été envisagés par l'école de *Monge*.

Digitized by Google

On a d'un côté les travaux de *Gaultier* (1812), de *Gergonne* (1816), de *Poncelet* et de *Chasles*, complétés avec la notion profonde de cycle due à *Laguerre* (1881). D'un autre côté on a les enveloppes de sphères à un et à deux paramètres, les familles de cercles à un et à deux paramètres, étudiées pour la première fois par *Monge* et par *Dupin*, complétées plus tard par *Moutard*, *Darboux*, *Ribaucour* et *Laguerre*.

A cette école de géométrie française s'ajoutent les travaux élégants de *Steiner* (1826), ceux de *Plücker* et de *Moebius* et enfin les idées nouvelles et profondes du géomètre norvégien *Sophus Lie*, qui l'ont conduit à la transformation admirable des sphères en droites.

24. *Coordonnées pentasphériques.* C'est M. *Darboux* qui, à l'occasion de ses mémorables travaux sur les cyclides et sur les systèmes triples orthogonaux, a introduit les coordonnées pentasphériques.

Posons

$$(29)\quad x_i = a_i\,(x^2 + y^2 + z^2) + b_i\,x + c_i\,y + d_i\,z + e_i\,,\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

les a, b, c, d, e étant des constantes, choisies de manière que l'on ait

$$\Delta = |\ a_i\,b_i\,c_i\,d_i\,e_i\ | \neq 0$$

Comme les équations $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) représentent des sphères (ou des plans, c'est-à-dire des sphères dont le centre est à l'infini), on dit que les x_i sont les *coordonnées pentasphériques* du point M dont les coordonnées cartésiennes sont x, y et z.

Les constantes a, b, c, d, e une fois choisies, les coordonnées pentasphériques d'un point ne sont pas arbitraires. On tire en effet de (29)

$$\Delta\,(x^2 + y^2 + z^2) = \Sigma A_i\,x_i\,,\ \Delta x = \Sigma B_i\,x_i\,,\ \Delta y = \Sigma C_i\,x_i\,,\ \Delta z = \Sigma D_i\,z_i\,,\ \Delta = \Sigma E_i\,x_i\,,$$

les A, B, ..., E étant les mineurs du premier ordre de Δ, d'où l'on a en premier lieu

$$x = \frac{\Sigma B_i x_i}{\Sigma E_i x_i}\,,\quad y = \frac{\Sigma C_i\,x_i}{\Sigma E_i x_i}\,,\quad z = \frac{\Sigma D_i x_i}{\Sigma E_i x_i}\,,$$

qui prouvent que l'on peut multiplier les x_i par un même facteur sans que le point M (x, y, z) change; de plus, on ne peut pas avoir $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, *les coordonnées pentasphériques sont donc homogènes.* En second lieu, comme on a aussi

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\Sigma A_i\,x_i}{\Sigma E_i\,x_i}\,,$$

il résulte

$$(30)\quad (\Sigma B_i\,x_i)^2 + (\Sigma C_i\,x_i)^2 + (\Sigma D_i\,x_i)^2 = \Sigma A_i\,x_i\,.\,\Sigma E_i\,x_i$$

c'est-à-dire que *les coordonnées pentasphériques x_i vérifient une relation quadratique homogène, dont la structure dépend des coefficients a, b, ..., e choisis et dont le discriminant est visiblement différent de zéro.*

Digitized by Google

A chaque système de coefficients $a, b, \ldots, e$ (abstraction faite d'un facteur) on a un sytème de coordonnées pentasphériques. Tous les systèmes qui conduisent à une même relation (30) seront dits *de même espèce.*

Une transformation linéaire

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=5} a_{ik} x_k, \; i = 1, 2, .., 5,$$

à déterminant différent de zéro, permet de passer d'un système de coordonnées pentasphériques à un autre. On peut toujours choisir le système de manière que la relation (30) ait la forme simple

$$(31) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = \Sigma x^2 = 0.$$

C'est ce dernier système que l'on considère habituellement comme coordonnées pentasphériques et que M. *Darboux* a défini géométriquement. C'est celui que nous emploierons, sauf avis contraire, dans la suite.

25. *Image dans un* E_4. Les coordonnées pentasphériques permettent de faire une représentation de l'espace euclidien E_3 sur l'espace quadratique à trois dimensions Q_3 représenté par (31) de l'espace projectif E_4. A tout point de E_3 correspond un point de Q_3 et réciproquement.

Une équation du premier degré, en coordonnées pentasphériques

$$(32) \quad \sum_1^5 a_i x_i \equiv \Sigma a x = 0$$

représente une sphère (ou un plan) et réciproquement. On peut dire aussi que toute sphère (ou plan) de E_3 a pour image dans le E_4 la section de l'espace quadratique Q_3 par l'espace linéaire (hyperplan) L_3 représenté par (32). Cependant il est plus commode de prendre comme image de la sphère (ou plan) le point a $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ conjugué de l'hyperplan (32) per rapport à Q_3: c'est *la seconde image* d'une sphère (ou plan).

De cette manière, *tout point a de l'espace projectif* E_4 *est l'image d'une sphère (ou plan) de l'espace euclidien* E_3. *Si a appartient à* Q_3, *la sphère correspondante est réduite à un point (sphère de rayon nul).*

26. *Faisceau de sphères.* Il est clair que toute sphère (ou plan) du faisceau déterminé par deux sphères données a et b, a pour image un point de la droite ab. *Toute droite de* E_4 *est ainsi l'image d'un faisceau de sphères.*

On peut faire la classification des faisceaux de sphères selon les différentes situations que peut avoir une droite par rapport à Q_3. Si la droite coupe Q_3 en deux points distincts, on a un faisceau à deux *points-sphères* (sphères de rayon nul). Ces deux points-sphères sont *inverses* par rapport à toute sphère du faisceau.

Si la droite est tangente à Q_3, le faisceau a un seul point-sphère: c'est le point de contact des sphères du faisceau, qui sont tangentes entre elles.

Digitized by Google

Si enfin la droite est une génératrice de Q_3, toute sphère du faisceau est de rayon nul et il est aisé de voir que dans E_3 la droite qui joint ces points-sphères est *isotrope*.

Remarque. Il résulte de ce qui précède que si l'on a dans l'espace euclidien E_3 deux points inverses par rapport à une sphère, leurs images dans E_4 sont deux points de Q_3 en ligne droite avec le point image de la sphère.

27. *Condition d'orthogonalité.* Il est facile de trouver la condition pour que deux sphères a et b soient orthogonales. Il suffit d'écrire, par exemple, que la sphère a contient deux points inverses par rapport à la sphère b.

Si $c\ (c_i)$ et $c'\ (c'_i)$ sont ces deux points, on aura

$$\Sigma a c = 0, \quad \Sigma a c' = 0,$$

et comme ils sont inverses par rapport à b, on a

$$b_i = \lambda c_i + \lambda' c'_i,$$

donc

$$(33) \quad \sum_1^5 a b = 0$$

est la condition cherchée, c'est-à-dire: *Deux sphères sont orthogonales si leurs images sont conjuguées par rapport à l'espace quadratique* Q_3.

28. *Condition de contact.* Nous nous proposons maintenant de chercher la condition pour que deux sphères a et b soient tangentes. Il faut et il suffit que la droite qui joint leurs images dans E_4 soit tangente à Q_3, donc

$$(34) \quad \Sigma a^2 . \Sigma b^2 = (\Sigma a b)^2.$$

On peut donner une autre forme à cette condition, plus simple, plus remarquable et plus propre à une représentation géométrique.

Nous avons employé, pour déterminer une sphère, les cinq coefficients a_i de l'équation (32): ce sont *les coordonnées de la première sorte* pour la sphère (32).

Nous introduirons maintenant *une nouvelle sorte de coordonnées de la sphère.* Posons

$$a_6^2 = -\sum_1^5 a_i^2,$$

ce qui ne détermine a_6 qu'au signe près: à chaque signe correspond une orientation pour la sphère. En fixant le signe on a *une sphère orientée.* On a donc le résultat suivant: *L'image d'une sphère orientée est un point situé sur l'espace quadratique* Q_4

$$(34) \quad \sum_1^6 x_i^2 = 0$$

de l'espace projectif E_5 *à cinq dimensions.*

Digitized by Google

On a ainsi la même représentation des sphères orientées que des droites de E_3. C'est dans cette identité que se trouve l'origine de la belle transformation de *Lie* des sphères en droites.

Revenons maintenant à la condition de contact (34) des sphères a et b; elle devient

$$\sum_1^5 a\,b = \pm\, a_6\, b_6.$$

Nous dirons de deux sphères orientées qu'elles sont tangentes si l'on a

$$(35) \quad \sum_1^6 a_i\, b_i = 0\,.$$

Dans ce cas

$$c_i = a_i + \lambda\, b_i\,, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$$

sont les coordonnées d'une sphère orientée, tangente, quelque soit λ, à la sphère a.

Un faisceau de sphères orientées tangentes a pour image dans l'espace E_5 *une génératrice rectiligne de l'espace quadratique* Q_4 *représenté par* (34).

29. *Cercles.* Un cercle peut être défini comme l'intersection de deux sphères

$$\sum_1^5 a\,x = 0\,, \quad \sum_1^5 b\,x = 0\,.$$

La première image d'un cercle est donc l'intersection de Q_3 par le L_2 (plan), représenté dans E_4 par les deux équations précédentes.

La seconde image, plus commode, est la droite conjuguée par rapport à Q_3 du plan précédent; elle joint les images a et b des sphères qui définissent le cercle. Tout point de ab est l'image d'une sphère qui passe par le cercle. La seconde image d'un cercle se confond avec l'image du faisceau de sphères défini par ce cercle.

Si la droite de E_4 est tangente à Q_3, le cercle se réduit à un point, c'est un cercle de rayon nul. Si la droite est une génératrice de Q_3, le cercle dégénère en une droite isotrope.

Cette méthode permet d'étudier, presque intuitivement, les propriétés de deux cercles[1]). Il s'agit d'étudier les propriétés de deux droites de E_4 et leur situation par rapport à Q_3.

Si les droites, images des deux cercles, se coupent, le point commun est l'image d'une sphère qui contient les deux cercles, ceux-ci sont *consphériques*. Le plan des droites coupe Q_3 suivant une conique (non-singulière ou singulière). La situation des cercles consphériques dépend de celle des deux droites par rapport à la conique. La situation du plan de la conique par rapport à Q_3 intervient aussi. Cette situation devient plus claire si l'on considère, au lieu du plan, la droite conjuguée par rapport à Q_3.

---

[1]) Voir les mémoires très intéressants de M. *Coolidge*: A study of the circle cross (Trans. of the amer. math. soc., 1913), Congruences and complexes of circles (ibid., 1914).

Digitized by Google

Si les deux droites ne se coupent pas, elles déterminent un L_3 de E_4, qui coupe Q_3 suivant une quadrique Q_2 (non-singulière ou singulière). Les différentes situations de deux cercles qui ne sont pas tracés sur la même sphère peuvent se déduire des situations que peuvent avoir deux droites par rapport à une quadrique.

Le point, conjugué par rapport à Q_3 du L_3 qui contient les droites images des deux cercles, est l'image d'une sphère orthogonale à toute sphère qui passe par l'un ou l'autre cercle, par conséquent orthogonale à chacun des deux cercles.

On voit ainsi que *si les deux cercles ne sont pas consphériques, il y a une seule sphère orthogonale aux deux.*

Si l'on considère maintenant une droite D'' qui coupe en même temps les images D et D' de deux cercles qui n'appartiennent à une même sphère, alors D'' est comprise évidemment dans l'espace L_3 déterminé par D et D'. La droite D'' est l'image d'un cercle consphérique avec les deux cercles donnés, et comme elle appartient au même L_3 que D et D', le cercle correspondant est orthogonal à la sphère orthogonale commune aux deux cercles donnés.

Bien que nous n'ayons pas l'intention d'étudier systématiquement toutes les situations de deux cercles, cependant, à titre d'exemple pour la puissance intuitive de la méthode, je considérerai deux situations particulières, étudiées, je crois, pour la première fois, par M. *Coolidge* (A study of the circle cross).

Nous avons les images D et D' des deux cercles et la quadrique Q_2 du L_3 déterminé par D et D' dans E_4. La quadrique Q_2 est, comme nous l'avons déjà dit, l'intersection de Q_3 par L_3. Considérons les droites Δ et Δ', conjuguées de D et D' respectivement par rapport à Q_2. Il est clair que si Δ coupe D', Δ' coupera D. En considérant les points communs ainsi définis, on a le théorème suivant de M. *Coolidge*:

Si l'on a deux cercles et que par l'un on puisse mener une sphère orthogonale à l'autre, on peut mener aussi par le second une sphère orthogonale au premier.

M. *Coolidge* dit dans ce cas qu *les cercles sont en involution.*

Supposons maintenant que Δ se confond avec D', alors Δ' se confond avec D, donc:

Si l'on a deux cercles et que par l'un on puisse mener deux sphères orthogonales à l'autre, alors toute sphère menée par chacun des cercles est orthogonale à l'autre.

M. *Coolidge* dit que dans ce cas *les cercles sont en bi-involution.*

VI. Courbes dans un espace projectif E_{n-1}.

30. *Définition.* Si les coordonnées projectives x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) d'un point x de l'espace projectif E_{n-1} sont des fonctions analytiques d'un paramètre t, nous dirons que le point x décrit une courbe (analytique) C. A chaque valeur *possible* de t correspond un point x de la courbe.

Digitized by Google

Cette définition implique un cas que l'on exclut habituellement de la définition d'une courbe. Si l'on suppose en effet que l'on a

$$x_i = a_i f(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

a_i étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles et $f(t)$ une fonction analytique non identiquement nulle, alors et seulement alors le point x est fixe: c'est le seul cas où la courbe C se réduit à un point.

Remarquons que dans ce cas on a

$$\frac{x'_i}{x_i} = \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

où

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt}.$$

Il résulte de là que les coordonnées x_i sont des solutions de l'équation linéaire et homogène du premier ordre

$$(36) \quad x' + p(t)\, x = 0$$

où

$$p(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

La réciproque est vraie, comme il est facile de le prouver. On peut donc énoncer le résultat suivant:

La courbe C *décrite par le point* x $(x_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ *de l'espace projectif* E_{n-1}, *dont les coordonnées* x_i *sont des fonctions (analytiques) d'un paramètre* t, *se réduit à un point fixe, seulement dans le cas où les* x_i *sont des solutions d'une même équation différentielle de la forme* (36).

31. Cherchons maintenant dans quel cas la courbe C de E_{n-1} se réduit à une droite.

En prenant deux points fixes distincts a' et a'' sur cette droite, on peut la représenter, à l'aide d'un paramètre t, sous la forme

$$(37) \quad x_i = a'_i f(t) + a''_i g(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions analytiques de t. Je suppose que ces fonctions ne vérifient pas une équation de la forme (36), car alors les x_i la vérifieraient aussi et la courbe C se réduirait à un point fixe.

Alors les x_i sont des solutions de l'équation

$$\begin{vmatrix} x'' & x' & x \\ f'' & f' & f \\ g'' & g' & g \end{vmatrix} = 0,$$

où x', f', g' et x'', f'', g'' sont les dérivées premières et secondes de x, f, g par rap-

Digitized by Google

port à t. Comme, en vertu de l'hypothèse faite, le coefficient de x'' est différent de zéro, cette équation est de la forme

$$x'' + p_1(t) \cdot x' + p_2(t) \cdot x = 0.$$

Réciproquement, si les x_i vérifient une équation de cette forme, $f(t)$ et $g(t)$ en étant deux solutions linéairement in dépendantes, on peut exprimer ces coordonnées à l'aide de formules de la forme (37), ce qui prouve que le point x décrit une ligne droite.

32. On peut aller plus loin et trouver une condition analogue pour que la courbe C de E_{n-1} appartienne à un espace linéaire L_{p-1} $(p < n)$ de E_{n-1}.

Si l'on se rappelle la représentation paramétrique

$$x_i = c' x'_i + c'' x''_i + \ldots + c^{(p)} x_i^{(p)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

d'un espace linéaire L_{p-1} de l'espace ambiant E_{n-1}, où x', x'', ..., $x^{(p)}$ sont p points fixes, linéairement indépendants, de L_{p-1} et c', c'', ..., $c^{(p)}$ des paramètres arbitraires (pas tous nuls), on aura une courbe C de cet espace en prenant pour les paramètres c des fonctions de t.

En raisonnant comme dans le cas $p = 2$, on peut énoncer la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante, pour que la courbe C *de l'espace projectif* E_{n-1}, *décrite par* x $(x_i(t), i = 1, 2, \ldots, n)$, *soit contenue dans un* L_{p-1} $(p \leqslant n)$, *est que les* x_i *vérifient une équation différentielle, linéaire et homogène, d'ordre* p.

Spécialement, dans le cas où les coordonnées $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ constituent un système fondamental de solutions d'une équation différentielle, linéaire et homogène, du n-ième ordre, la courbe C de E_{n-1} ne peut être contenue dans un espace linéaire à moins de $n - 1$ dimensions.

Soit

$$(38) \quad x^{(n)} + p_1(t) \cdot x^{(n-1)} + p_2(t)\, x^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(t) \cdot x' + p_{(n)}(t) \cdot x = 0$$

l'équation différentielle vérifiée par les x_i. Comme

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

le déterminant des a étant différent de zéro, est aussi un système fondamental de (38), cette équation ne définit pas seulement la courbe C, mais aussi toutes celles qui s'en déduisent par des transformations projectives. On peut dire que l'équation (38) donne les propriétés projectives de la courbe C.

C'est à ce point de vue que s'est placé M. *Wilczynski* pour étudier les courbes planes et gauches et les surfaces réglées (Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Teubner, 1906).

Digitized by Google

Si l'on remarque maintenant qu'en appliquant à l'équation (38) la transformation

$$x = \lambda(t) \, . \, \xi,$$

ensuite

$$t = \varphi(\tau),$$

ou les deux combinées, la courbe C ne change pas, on peut dire que les propriétés projectives de cette courbe sont les propriétés de l'équation (38), invariantes par rapport aux transformations précédentes.

Les résultats remarquables obtenus par M. *Wilczynski* et ses élèves dans cette voie prouvent la puissance de cette méthode, quoique le calcul des invariants et des covariants soit un peu long et laborieux.

33. *Espaces linéaires osculateurs.* Considérons une courbe C dans l'espace E_{n-1} et supposons, pour plus de généralité, qu'elle soit contenue dans un espace linéaire L_{p-1}, $1 < p \leqslant n$, de E_{n-1}, sans êtres contenue dans un espace linéaire à moins de $p - 1$ dimensions.

Les coordonnées x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) du *point générateur* x de la courbe sont des fonctions d'un paramètre t vérifiant une équation de la forme

$$(39) \quad x^{(p)} + q_1(t) \, x^{(p-1)} + q_{p-1}(t) \, . \, x' + q_p(t) \, . \, x = 0$$

sans en vérifier une d'un ordre moindre que p.

En relation étroite avec le point x qui décrit la courbe C, que nous désignerons maintenant par (x), nous avons les points x', x'', ..., $x^{(r)}$, ..., de coordonnées

$$x'_i = \frac{d\,x_i}{dt}, \; x''_i = \frac{d^2\,x_i}{dt^2}, \; \ldots, \; x^{(r)}_i = \frac{d^r\,x_i}{dt^r}, \; \ldots, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

et qui décrivent les courbes (x'), (x''), ..., $(x^{(r)})$, ... Je dis que *toutes ces courbes sont situées dans le même espace linéaire* L_{p-1} *que la courbe initiale* (x).

Il est manifeste que, comme on a

$$x_i^{(r)} = \frac{d\,x_i^{(r-1)}}{dt},$$

il suffit de faire la démonstration pour la courbe (x').

Or, nous avons, pour h suffisamment petit

$$x_i(t + h) = x_i(t) + h\,x'_i(t + \theta\,h), \; i = 1, 2, \ldots, n; \; 0 < \theta < 1,$$

d'où résulte que le point y, défini par

$$y_i = x'_i(t + \theta\,h), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

est situé sur la corde $x\,\bar{x}$ de la courbe (x), $\bar{x}$ étant le point de (x) ayant pour coordonnées

$$\bar{x}_i = x_i(t + h), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les deux points x et $\bar{x}$, appartenant à la courbe (x), sont contenus dans l'espace

Digitized by Google

linéaire L_{p-1} ; il en est donc de même du point y, quelque soit h. Lorsque h tend vers zéro, y tend vers x', qui se trouve donc dans L_{p-1}. La courbe (x') décrite par x', lorsque t varie, y est aussi. La proposition est ainsi démontrée.

Remarquons maintenant que les points x, x', ..., $x^{(p-1)}$ sont linéairement indépendants, autrement les x_i vérifieraient une équation différentielle, linéaire et homogène, d'un ordre $r < p$ et alors la courbe C $\equiv (x)$ serait située, contre l'hypothèse, dans un L_{r-1}. Ces p points déterminent donc l'espace linéaire L_{p-1}, dans lequel est immergée la courbe C. Les autres points $x^{(p)}$, $x^{(p+1)}$, ... dépendent linéairement de ceux-là. La dépendance linéaire de $x^{(p)}$ est exprimée par l'équation (39), qui acquiert ainsi une interprétation géométrique ; celle des autres points $x^{(p+1)}$, $x^{(p+2)}$, ..., s'obtient aisément de la même équation par des dérivations successives.

Ce sont ces p points qui donnent les propriétés différentielles projectives de la courbe C. Nous nous en servirons pour définir les espaces linéaires osculateurs de cette courbe.

Commençons par le cas le plus simple, d'ailleurs virtuellement traité. La droite déterminée par les points x et x' est, comme nous venons de le voir, la limite de la corde $x\bar{x}$ de la courbe C, lorsque le point $\bar{x}$, voisin de x, tend vers ce point ; c'est la *tangente* ou *le* L_1-*osculateur* à C en x. En général, le point x' est distinct de x ; ils ne peuvent se confondre que si x est un *point singulier* de la courbe. Si x' se confond avec x, quelque soit t, alors les x_i vérifient une équation de la forme (36) et C se réduit à un point.

Considérons actuellement l'égalité

$$x_i(t+h) = x_i + h\,x'_i + \frac{h^2}{1.2}\,x''_i(t+\theta h)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,,\ 0 < \theta < 1\,,$$

qui prouve que le point y de coordonnées

$$y_i = x''_i\,(t+\theta h)\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

est situé dans le plan déterminé par les points x, x' et $\bar{x}$, où

$$\bar{x}_i = x_i\,(t+h)\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

En faisant converger h vers zéro on obtient le résultat suivant:

Le plan passant par les points x, x' et x'', que nous appellerons le plan ou le L_2-*osculateur en x à la courbe* C, *est la limite du plan variable qui passe par la tangente xx' et par le point voisin $\bar{x}$ de la courbe, lorsque ce dernier converge vers x.* Ce plan cesse d'être déterminé si, x n'étant pas singulier, x'' est sur la droite xx'. Ceci ne peut arriver que pour des points exceptionnels de la courbe (que l'on pourrait nommer des *points singuliers de la seconde espèce*, en nommant *points singuliers de la première espèce* ceux où x' se confond avec x), autrement C serait une droite.

Digitized by Google

On démontre exactement de la même manière la proposition générale suivante:

Le L_r $(r < p-1)$*-osculateur à la courbe* C *en* x *est déterminé par les* $r+1$ *points* $x, x', \ldots, x^{(r)}$ *qui sont linéairement indépendants; il est la limite d'un* L_r *variable passant par les points fixes* $x, x', \ldots, x^{(r-1)}$ *et par le point variable* $\bar{x}$ *de* C, *lorsque ce dernier point tend vers* x.

On peut dire encore que le L_r-osculateur en x est la limite d'un L_r variable, passant par $r+1$ points de C voisins de x, lorsque ces points viennent se confondre avec x.

Il résulte de ce qui précède qu'en chaque point ordinaire x de la courbe C il y a $p-2$ espaces linéaires osculateurs, un L_1, un L_2, ..., un L_{p-2}, sans compter, naturellement, l'espace L_{p-1} qui contient la courbe C toute entière.

34. *Dualité.* Nous allons compléter le principe de dualité établi au no. 10 pour les figures linéaires, en l'étendant aux courbes. Nous nous bornerons, ici aussi, au cas simple où la dualité (la transformation corrélative) est définie par un espace quadratique de l'espace projectif E_{n-1}. Nous prendrons l'équation de cet espace quadratique Q_{n-2} non-singulier sous la forme réduite

$$\sum_1^n x^2 = 0 .$$

Soit C une courbe de E_{n-1}, qui n'est pas contenue dans un espace linéaire à moins de $n-1$ dimensions, définie par conséquent par une équation de la forme (38). Ses tangentes (ses L_1 osculateurs) forment une configuration, que nous appellerons, par analogie, une *développable de première espèce* ou une Δ_1. Ses L_2 osculateurs forment une *développable de seconde espèce* ou une Δ_2. En général, ses L_r-osculateurs $(r \leqslant n-2)$ forment une *développable de la r-ième espèce* ou une Δ_r. On a ainsi, attachées à la courbe C, $n-2$ développables, $\Delta_1, \Delta_2 \ldots, \Delta_{n-2}$, dont C est *l'arête de rebroussement.*

Cela étant, soit y le point conjugué, par rapport à Q_{n-2}, du L_{n-2}-osculateur en un point x de C. Comme ce L_{n-2} n'est pas fixe, le point y est variable; il décrit une courbe C', la courbe duale ou corrélative de C.

La courbe C' ne peut être contenue dans un espace linéaire à $n-2$ dimensions, car alors les L_{n-2}-osculateurs de C passeraient tous par un point fixe a, dont les coordonnées s'exprimeraient linéairement à l'aide de celle de $x, x', \ldots, x^{(n-2)}$. On aurait donc

$$a_i = r(t)\, x_i^{(n-2)} + r_1(t)\, x_i^{(n-3)} + \ldots + r_{n-3}(t)\, x'_i + r_{n-2}(t) \cdot x_i ;$$

les x_i vérifieraient alors l'équation du $n-1$-ième ordre

$$\frac{d}{dt}\left[r_1\, x^{(n-2)} + r_1\, x^{(n-3)} + \ldots + r_{n-3}\, x' + r_{n-2}\, x\right] = 0 ,$$

ce qui serait contre l'hypothèse.

Digitized by Google

Analytiquement, les coordonnées de y sont déterminées par les relations

$$(40)\quad \Sigma\, y\, x = 0,\quad \Sigma\, y\, x' = 0,\ \ldots,\quad \Sigma\, y\, x^{(n-2)} = 0,\quad \Sigma\, y\, x^{(n-1)} = 1,$$

la dernière fixant le facteur par lequel on peut multiplier les y_i. En vertu de la remarque précédente ces dernières quantités vérifient une équation de la même forme que l'équation (38) à laquelle satisfont les x_i, à savoir

$$y^{(n)} - (p_1\, y)^{(n-1)} + (p_2\, y)^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1}\,(p_{n-1}\, y)' + (-1)^n\, p_n\, y = 0$$

que l'on appelle *l'adjointe de Lagrange*[1]) de (38). Ce dernier point dont nous n'aurons pas besoin, peut être prouvé en partant du système (40).

Remarquons maintenant que de (40) on tire

$$\Sigma\, y'\, x = 0,\quad \Sigma\, y'\, x' = 0,\ \ldots,\quad \Sigma\, y'\, x^{(n-3)} = 0,\quad \Sigma\, y'\, x^{(n-2)} = -1,$$

d'où l'on conclut que la tangente yy' est conjuguée au L_{n-3}-osculateur en x à C. On peut dire que dans la corrélation définie par l'espace quadratique Q_{n-2} la développable Δ'_1 attachée à C′ et la développable Δ_{n-3} attachée à C se correspondent. On démontrerait de la même manière qu'il y a correspondance entre les développables Δ'_r et Δ_{n+r-2} $(1 \leqslant r \leqslant n-3)$. A la courbe C′ il correspond la développable Δ_{n-2} et à la courbe C la développable Δ'_{n-2}.

35. Il est intéressant de considérer maintenant la figure corrélative d'une courbe C de l'espace projectif E_{n-1} contenue dans un espace linéaire L_{p-1} à $p-1$ dimensions. Nous supposons que ce L_{p-1} coupe Q_{n-2} selon un espace quadratique non-singulier Q_{p-2}.

La figure corrélative de la courbe C par rapport à Q_{n-2} passe évidemment par la courbe corrélative C′ de C par rapport à Q_{p-2}; elle passe d'ailleurs par l'espace linéaire L_{n-p-1} conjugué de l'espace L_{p-1} de la courbe par rapport à Q_{p-2}.

Au point x de C il correspond le L_{n-2} qui passe par le L_{n-p-1} fixe que nous venons de définir et par le L_{p-2}-osculateur à C′ au point y qui correspond à x. Lorsque x décrit C, le L_{n-2} correspondant décrit une *développable singulière* Δ'_{n-2}; nous l'appelons ainsi, parceque le L_{n-2} générateur passe par un L_{n-p-1} fixe, le L_{n-p-1} *singulier* de la développable.

A la développable Δ_r $(1 \leqslant r \leqslant p-2)$ attachée à C, il correspond une développable singulière Δ'_{n-r-2}. engendrée par le L_{n-r-2} (conjugué d'un L_r-osculateur à C) passant part le L_{n-p-1} fixe et par un L_{p-r-2}-osculateur de C′ variable.

En particulier, à la développable Δ_{p-2} attachée à C, il correspond la développable singulière Δ'_{n-p} passant par L_{n-p-1} et par C′. C'est cette développable que l'on peut considérer comme la figure corrélative de la courbe C.

[1]) On peut consulter sur l'équation adjointe de Lagrange les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. *Darboux* (Tome II, page 99 et suiv.).

Digitized by Google

36. *Courbes autoconjuguées.* Nous dirons qu'une courbe C de E_{n-1} est *autoconjuguée*, si elle coincide avec sa conjuguée par rapport à un espace quadratique Q_{n-2}, d'une manière plus précise, si le L_{n-2} conjugué de chaque point x de la courbe se confond avec le L_{n-2}-osculateur en x. Les relations (40) donnent alors

$$\Sigma x^2 = 0\,,\quad \Sigma x x' = 0\,,\ \ldots\,,\ \Sigma x x^{(n-2)} = 0\,,\quad \Sigma x x^{(n-1)} = 1,$$

dont la première prouve que C appartient à Q_{n-2}.

Nous voulons démontrer que n doit être un nombre impair. Supposons en effet le contraire, $n = 2p$. Comme les L_r et L_{2p-r-2}-osculateurs en x sont conjugués, on aura pour $r = p - 1$ que le L_{p-1}-osculateur est conjugué à lui-même. On en conclut la relation

$$\Sigma (x^{(p-1)})^2 = 0\,,$$

d'où

$$\Sigma\, x^{(p-1)}\, x^{(p)} = 0\,,$$

ce qui prouverait que les L_{p-1} et L_p-osculateurs seraient conjugués, ce qui n'est pas. D'ailleurs de la relation précédente on pourrait déduire de proche en proche

$$\Sigma\, x x^{(2p-1)} = 0\,,$$

qui montrerait que C peut être contenue dans un espace linéaire à moins de $2p-1$ dimensions.

On a donc nécessairement $n = 2p+1$ et il est facile de voir que non seulement la courbe C, mais aussi les développables $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{p-1}$, attachées à cette courbe, sont toutes situées dans l'espace quadratique Q_{2p-1}, par rapport auquel la courbe C est autoconjuguée, car on a les relations

$$(41)\quad \Sigma\, x^{(r)}\, x^{(s)} = 0\,,\ r + s < 2p\,.$$

Parmi ces dernières on a spécialement les relations

$$(42)\quad \Sigma\, x^2 = 0\,,\quad \Sigma\, (x')^2 = 0\,,\ \ldots\,,\quad \Sigma\, (x^{(p-1)})^2 = 0\,,$$

et réciproquement de celles-ci on peut déduire, de proche en proche, les (41). Ces relations sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe C de E_{2p} soit autoconjuguée par rapport à l'espace quadratique Q_{2p-1}.

Il s'agit maintenant de déterminer la courbe autoconjuguée la plus générale de E_{2p}. A cet effet nous emploierons une méthode, qui ne diffère que par la forme de celle qui a été donnée par M. *Borel*, dans un mémoire très intéressant sur l'équation adjointe (Annales de l'École Normale, 1892).

Soit a le point de Q_{2p-1} ayant pour coordonnées

$$a_k = 0\,,\ k = 1, 2, \ldots, 2p-1,\ a_{2p} = 1,\ a_{2p+1} = i = \sqrt{-1}.$$

La tangente xx' au point x de C coupe le L_{2p-1} tangent en a à Q_{2p-1} en un point y et la droite ay coupe le L_{2p-1} représenté par

$$x_{2p+1} = 0$$

Digitized by Google

en un point ξ, qui appartient au L_{2p-2} ayant pour équations

$$x_{2p} = x_{2p+1} = 0.$$

Ce L_{2p-2} coupe Q_{2p-1} selon l'espace quadratique Q_{2p-3}

$$(Q_{2p-3}) \quad \sum_1^{2p-1} x^{2k} = 0, \quad x_{2p} = x_{2p+1} = 0.$$

Je dis que le point ξ décrit une courbe Γ autoconjuguée par rapport à Q_{2p-3}. On a en effet

$$(43) \quad \begin{cases} \xi_k = \lambda x_k + \mu x'_k, \ k = 1, 2, \ldots, 2p-1, \\ + \varrho = \lambda x_{2p} + \mu x'_{2p}, \\ + i\varrho = \lambda x_{2p+2} + \mu x'_{2p+1}, \end{cases}$$

d'où l'on tire d'abord

$$\sum_1^{2p-1} \xi^2 = 0$$

et en général

$$\Sigma \xi^{(r)} \xi^{(s)} = 0, \ r+s < 2p-2,$$

ce qui prouve la proposition. On peut donc déduire de toute courbe autoconjuguée de E_{2p} une courbe autoconjuguée d'un E_{2p-2}.

Nous allons démontrer que réciproquement on peut remonter de la courbe autoconjuguée Γ de E_{2p-2} à une courbe C autoconjuguée de E_{2p}. Il faudra intégrer le système (43), où les ξ_k sont des fonctions connues vérifiant les relations

$$(44) \quad \sum_1^{2p-1} \xi^2 = 0, \quad \Sigma (\xi')^2 = 0, \ldots, \quad \Sigma (\xi^{(p-2)})^2 = 0,$$

les x_k ($k = 1, 2, \ldots, 2p+1$) les fonctions inconnues, enfin λ, μ et ϱ des fonctions arbitraires.

En posant

$$x_k = y_k e^{-\int \frac{\lambda}{\mu} dt}, \ k = 1, 2, \ldots, 2p+1$$

on peut réduire le système (43) au suivant

$$\frac{y'_1}{\xi_1} = \frac{y'_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{y'_{2p-1}}{\xi_{2p-1}} = \frac{y'_{2p}}{+\varrho} = \frac{y'_{2p-1}}{+i\varrho},$$

lequel, en changeant au besoin la variable indépendante, peut être pris sous la forme

$$(45) \quad y'_k = \xi_k, \ y'_{2p} = \varrho, \ y'_{2p+1} = i\varrho.$$

Les relations (44) donnent

$$\sum_1^{2p+1} y'^2_k = 0, \ \Sigma y''^2_k = 0, \ldots, \ \Sigma (y^{(2p-1)})^2 = 0,$$

Digitized by Google

il suffit donc de déterminer ϱ de manière que l'on ait

$$\Sigma\, y^2_k = 0,$$

pour que le problème soit résolu. Or en tirant de (45) les valeurs de y, cette dernière égalité devient

$$\sum_1^{2p-1} \left(\int \xi_k\, dt + a_k\right)^2 + \left(-\int \varrho\, dt + c\right)^2 + \left(-i\int \varrho\, dt + c'\right)^2 = 0,$$

a_k, c et c' étant des constantes, ou

$$2(c + i\,c')\int \varrho\, dt = \Sigma \left(\int \xi_k\, dt + a_k\right)^2 + c^2 + c'^2.$$

En supposant $c + i\,c' \neq 0$, cette égalité détermine $\int \varrho dt$, la courbe C de E_{2p} est alors décrite par le point y de coordonnées

$$y_k = \int \xi_k\, dt + a_k,\ (k=1, 2, \ldots, 2p-1),\ y_{2p} = -\int \varrho\, dt + c,\ y_{2p+1} = -i\int \varrho\, dt + c'.$$

Il résulte alors que si l'on considère d'abord le cas $p = 1$, c'est-à-dire la courbe autoconjuguée par rapport à une conique, qui est cette conique même, on peut remonter de proche en proche à la courbe autoconjuguée d'un E_{2p}. En prenant, par exemple, pour la conique la représentation paramétrique

$$\xi_1 = \frac{1-t^2}{2},\ \xi_2 = \frac{1+t^2}{1\,i},\ \xi_3 = t,$$

on aura pour la courbe C de E_4

$$y_1 = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6},\ y_2 = \frac{1}{i}\left(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6}\right),\ y_3 = \frac{t^2}{2},\ y_4 = \frac{t^4}{48} + 1,\ y_5 = -i\frac{t^4}{48} + i,$$

où, pour plus de simplicité, nous avons particularisé les constantes.

M. *Darboux*[1]) a démontré que toutes les courbes autoconjuguées peuvent être exprimées sans signe de quadrature.

VII. Surfaces réglées d'un E_3.

37. Si les coordonnées de Klein x_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) d'une droite x (no. 15) sont des fonctions d'un paramètre t, nous dirons qu'elle décrit une *surface réglée*. Le point x de E_5, image (no. 14) de la droite x, décrit alors une courbe tracée sur l'espace quadratique Q_4

$$\Sigma x^2 = 0.$$

[1]) *Leçons sur la théorie des surfaces* (II, p. 118).

Digitized by Google

En général, les x_i sont linéairement indépendantes; elles sont donc solutions d'une équation de la forme

$$x^{VI} + p_1 x^V + p_2 x^{IV} + p_3 x''' + p_4 x'' + p_5 x' + p_6 x = 0.$$

Si entre les x_i il y a une seule relation linéaire, la surface réglée X appartient à un complexe linéaire et l'équation différentielle correspondante est du cinquième ordre.

Si la surface X appartient à une congruence linéaire, et dans ce cas elle a deux directrices rectilignes (distinctes ou confondues), l'équation différentielle correspondante est du quatrième ordre.

Lorsque les x_i vérifient une équation différentielle du troisième ordre, la surface X est formée par les génératrices d'une famille d'une surface du second ordre.

Si l'équation correspondante est du second ordre, la surface se réduit à un faisceau plan.

Enfin dans le cas d'une équation du premier ordre, la droite x est fixe.

On a ainsi une classification des surfaces réglées, faite en partant de l'espace linéaire auquel appartiennent leurs images sur l'espace quadratique Q_4.

38. On peut faire une autre classification des surfaces réglées, en partant des propriétés infinitésimales de leurs images.

Soit X une surface réglée et désignons aussi par X son image sur Q_4. Considérons deux points voisins x et $\bar{x}$ de la courbe X, correspondant aux valeurs t et $t+h$ du paramètre. On a

$$\bar{x}_i = x_i + h\,x'_i + \frac{h^2}{2!}\,x''_i + \frac{h^3}{3!}\,x'''_i + \dots\dots,$$

d'où l'on tire, en tenant compte que l'on a

$$\Sigma x^2 = 0, \quad \Sigma x x' = 0,$$

l'égalité

$$(46) \quad \Sigma x\bar{x} = \frac{h^2}{2!}\,\Sigma x x'' + \frac{h^3}{3!}\,\Sigma x x''' + \dots.$$

On a donc le résultat suivant: *Pour une surface réglée générale l'expression* $\Sigma x\bar{x}$ *est un infiniment petit* (par rapport à h) *du second ordre.*

Le premier cas particulier à considérer est celui où l'on a

$$(47) \quad \Sigma x x'' = 0,$$

car alors (46) montre que $\Sigma x\bar{x}$ est au moins un infiniment petit du troisième ordre.

Comme on a successivement

$$\Sigma x^2 = 0, \ \Sigma x x' = 0, \ \Sigma x x'' + \Sigma x'^2 = 0,$$

Digitized by Google

la relation précédente peut être remplacée par

$$(48)\quad \Sigma x'^2 = 0$$

qui exprime que les tangentes xx' de la courbe X appartiennent, comme la courbe X elle-même, à l'espace Q_4.

D'ailleurs chacune de ces droites xx' de Q_4 est l'image d'un faisceau plan de E_3. Ce faisceau étant déterminé par la génératrice x et par une génératrice infiniment voisine $\bar{x}$, on voit que la surface réglée X est l'enveloppe du plan du faisceau, c'est donc une *surface développable.*

Pour finir avec ce premier cas particulier, remarquons que des relations (47) et (48) on tire aisément

$$(49)\quad \Sigma x x''' = 0,$$

et alors (46) devient

$$(50)\quad \Sigma\, x\bar{x} = \frac{h^4}{4!}\Sigma x x^{IV} + \frac{h^5}{5!}\Sigma\, x x^{V} + \ldots,$$

qui exprime que *les génératrices voisines* x *et* $\bar{x}$ *de* X *se coupent à des infiniments petits du quatrième ordre près.*

39. Le second cas particulier est celui où l'on a non seulement la relation (48), mais aussi

$$(51)\quad \Sigma x x^{IV} = 0.$$

Je dis que dans ce cas on a

$$\Sigma x\bar{x} \equiv 0,$$

quelque soient t et h, pourvu que les $\bar{x}_i \equiv x_i(t+h)$ soient développables suivant les puissances croissantes de h.

Il suffit de prouver que l'on a, à l'aide de (48) et (51),

$$(52)\quad \Sigma x x^{V} = 0,$$

car, en vertu de l'équation différentielle du sixième ordre vérifiée par les x_i, il en résultera

$$\Sigma x x^{VI} \equiv 0.$$

Comme les points x^{VII}, ... sont, tout comme x^{VI}, linéairement dépendants de x, x', ..., x^V, on aura indéfiniment

$$\Sigma x x^{(n)} = 0,\quad n = VI, VII, \ldots,$$

donc (50) deviendra

$$\Sigma x\bar{x} \equiv 0.$$

Tout se réduit donc à prouver que l'on a (52) en partant de (48) et (51). Or,

Digitized by Google

par dérivations successives des relations données, parmi lesquelles il y a aussi (49), on voit d'abord que l'on peut remplacer la relation (51) par

$$(53) \quad \Sigma x' x''' = 0$$

et celle-ci par

$$(54) \quad \Sigma x''^2 = 0.$$

En second lieu, de (51) et (53) on tire

$$\Sigma x x^{V} + \Sigma x' x^{IV} = 0, \quad \Sigma x' x^{IV} + \Sigma x'' x''' = 0,$$

donc, en vertu de (54)

$$\Sigma x x^{V} = \Sigma x'' x''' = 0,$$

et la relation (52) est ainsi prouvée.

Le résultat analytique que nous venons de démontrer fait voir que deux génératrices quelconques de la surface réglée X se rencontrent. *On en conclut, ou bien que ces génératrices sont situées dans un même plan et alors elles sont les tangentes d'une courbe plane (qui peut se réduire à un point), ou bien qu'elles passent par un même point fixe et alors la surface* X *est un cône.*

Ce cas particulier peut être caracterisé par les relations

$$\Sigma x'^2 = 0, \quad \Sigma x''^2 = 0,$$

à laquelle on doit ajouter la relation sousentendue $\Sigma x^2 = 0$.

40. Nous supposerons actuellement que la surface réglée X n'est pas développable et nous allons chercher la signification géométrique des différents éléments infinitésimaux projectifs de son image X, tracée sur l'espace quadratique Q_4, autour d'un de ses points x.

Prenons d'abord la tangente xx': c'est la seconde image d'une congruence linéaire, formée par les droites qui coupent la génératrice x et la génératrice infiniment voisine, c'est-à-dire par toutes les tangentes de la surface réglée X le long de la génératrice x.

Prenons maintenant le plan ou le L_2-osculateur $xx'x''$: c'est la seconde image d'une série linéaire ou d'une demi-quadrique dont les droites coupent la génératrice x et deux autres génératrices infiniments voisines de X. L'intersection de ce plan osculateur avec Q_4 est la première image de la demi-quadrique complémentaire à laquelle appartiennent les trois génératrices infiniment voisines. Ces deux demi-quadriques forment la *quadrique osculatrice* à X le long de x.

Le L_3-osculateur $xx'x''x'''$ est la seconde image d'un ensemble linéaire, dont la première image est l'intersection de Q_4 avec la droite conjuguée par rapport à cet espace quadratique du L_3-osculateur considéré. On a ainsi, le long de chaque génératrice x de X, deux droites qui coupent x et encore trois génératrices infiniment voisines: ce sont les deux *tangentes flecnodales* de X le long de x.

Digitized by Google

Lorsque la génératrice x varie, les points de contact des tangentes flecnodales — *les points flecnodaux* — décrivent les deux *courbes flecnodales* de la surface, tandis que les deux tangentes flecnodales forment deux surfaces réglées, les *surfaces flecnodales* de la surface donnée X.

Considérons enfin l'espace L_4-osculateur $xx'x''x'''x^{IV}$. Son intersection avec Q_4, ou bien son pôle par rapport à Q_4, est l'image du complexe linéaire qui contient la génératrice x et quatre autres génératrices infiniment voisines: c'est le *complexe osculateur* à X le long de x.

41. *Surfaces réglées à lignes flecnodales confondues.* Comme application de la théorie précédente nous allons considérer une classe particulière de surfaces réglées, dont les lignes ou les surfaces flecnodales, au lieu d'être distinctes, comme c'est le cas général, sont confondues.

Les surfaces réglées à lignes flecnodales confondues ont été rencontrées par bien des géomètres. C'est ainsi que M. *Voss*, qui a considéré pour la première fois les lignes flecnodales des surfaces réglées, a étudié le cas des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire et dont les lignes flecnodales sont confondues (*Mathem. Annalen*, Bd. 8).

Plus tard, M. *Gino Fano*, dans son travail remarquable sur les équations différentielles linéaires (*Mathem. Annalen*, Bd. 53), a considéré aussi cette classe spéciale de surfaces réglées.

C'est surtout M. *Wilczynski*, dans son livre déjà mentionné sur les courbes et les surfaces réglées, qui a étudié de plus près ces surfaces particulières.

Soit y la tangente flecnodale qui correspond à la génératrice x. On a

$$(55)\quad \Sigma y^2 = 0,\ \Sigma yx = 0,\ \Sigma yx' = 0,\ \Sigma yx'' = 0,\ \Sigma yx''' = 0.$$

Comme y est la limite de deux tangentes flecnodales qui se sont confondues, on a aussi

$$\Sigma y'x = 0,\ \Sigma y'x' = 0,\ \Sigma y'x'' = 0,\ \Sigma y'x''' = 0.$$

On tire de là

$$(56)\quad \Sigma y\, x^{IV} = 0,$$

qui prouve que y est la droite singulière du complexe linéaire osculateur à la surface le long de x. On a donc le résultat suivant:

Le complexe linéaire osculateur, le long de toute génératrice x d'une surface réglée à lignes flecnodales confondues, est spécial.

Comme nous venons de le voir, la droite singulière de ce complexe spécial est la tangente flecnodale y qui correspond à la génératrice x.

Remarquons maintenant qu'un calcul simple permet de déduire des relations précédents les suivantes

$$\Sigma xy = 0,\ \Sigma xy' = 0,\ \Sigma xy'' = 0,\ \Sigma xy''' = \Sigma xy^{IV} = 0,$$

Digitized by Google

qui prouvent que la génératrice x de la surface donnée X est tangente flecnodale de la surface réglée Y — surface flecnodale de X — décrite par y. Même plus, c'est la droite singulière du complexe osculateur à Y le long de y, complexe linéaire qui est spécial.

Comme on a aussi

$$\Sigma x' y = 0, \Sigma x' y' = 0, \Sigma x' y'' = 0, \Sigma x' y''' = 0,$$

on voit que l'autre tangente flecnodale z a pour coordonnées

$$z_i = x_i + \lambda x'_i, \ i = 1, 2, \ldots, 6,$$

λ devant être déterminé de manière que l'on ait

$$\Sigma z^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda^2 \Sigma x'^2 = 0.$$

Nous supposerons que la surface X n'est pas développable, donc $\lambda^2 = 0$, ce qui prouve que *la surface* Y *a elle aussi les lignes flecnodales confondues et que de plus* X *est sa surface flecnodale.*

A l'aide des relations précédentes on peut démontrer encore une relation remarquable entre les deux surfaces X et Y, à savoir que les demi-quadriques osculatrices à X et à Y le long de x et de y sont complémentaires, c'est-à-dire forment une même quadrique.

Il faudra prouver que les plans osculateurs aux courbes X et Y en x et y sont conjugués par rapport à Q_4, ou encore que l'on a

$$\Sigma (lx + mx' + nx'')(py + qy' + ry'') = 0,$$

quelles que soient l, m, n, p, q et r, ce que l'on vérifie aisément.

42. Parmi les surfaces réglées à lignes flecnodales confondues en une seule courbe il y a une classe particulière qui mérite une mention spéciale, à savoir celle des surfaces dont la ligne flecnodale est plane.

Avant de considérer cette classe particulière, supposons que X soit une surface réglée quelconque à lignes flecnodales confondues. Lorsque le point M, commun à la génératrice x et à sa tangente flecnodale y, décrit la ligne flecnodale, il y a, parmi les tangentes en M à X, deux qui décrivent des surfaces développables, la tangente à la ligne flecnodale et la génératrice de la développable circonscrite à X le long de la ligne flecnodale, et il n'y en a pas d'autres. En effet, les coordonnées d'une tangente z en M sont de la forme

$$z_i = x_i + \lambda(t) . y_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, 6$$

où λ est déterminé de manière que l'on ait

$$\Sigma z'^2 = 0,$$

Digitized by Google

donc par

$$(57)\quad \Sigma x'^2 + \lambda^2 \Sigma y'^2 = 0,$$

qui donne bien deux valeurs pour λ. Comme ces deux valeurs sont égales et de signes contraires, on a le résultat suivant:

La tangente à la ligne flecnodale et la génératrice de la développable circonscrite à X *le long de cette ligne sont conjuguées harmoniques par rapport à la tangente flecnodale y et la génératrice x, qui passent par* M.

Cela étant établi, supposons maintenant que la ligne flecnodale soit plane. Ceci signifie que pour une des valeurs de λ tirées de (57) on a

$$\Sigma z''^2 = 0,$$

ou, en tenant compte de (55) et (56),

$$\Sigma x''^2 + 4\lambda'^2 \Sigma y'^2 + \lambda^2 \Sigma y''^2 + 2\lambda\lambda'' \Sigma yy'' + 4\lambda\lambda' \Sigma y'y'' = 0.$$

Or cette relation est évidemment satisfaite aussi par l'autre valeur de λ, *la développable circonscrite le long de la ligne flecnodale plane est donc un cône.*

VIII. Surfaces dans un E_{n-1}.

43. Si les coordonnées projectives x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) d'un point x de l'espace projectif E_{n-1} sont des fonctions analytiques de deux variables indépendantes u et v, nous dirons que le point x décrit un espace à deux dimensions S_2 ou une surface (analytique) de E_{n-1}. A chaque groupe *possible* de valeurs u et v correspond un point x de la surface.

Comme dans le cas des courbes, cette définition de la surface est, à un certain point de vue, plus large que celle qu'on donne habituellement. En effet, notre définition embrasse les cas où la surface se réduit à un point fixe ou à une courbe. Nous allons étudier d'abord ces cas particuliers.

44. *Surface réduite à un point fixe.* Une surface se réduit à un point fixe dans le cas et seulement dans le cas où les coordonnées du *point générateur* x sont de la forme

$$(58)\quad x_i = a_i f(u, v),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

les a_i étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles et $f(u, v)$ une fonction analytique non identiquement nulle.

Remarquons tout de suite que ces valeurs de x_i vérifient les équations aux dérivées partielles

$$(59)\quad x_u + p(u, v)\, x = 0,\ x_v + q(u, v)\, x = 0,$$

où

$$x_u = \frac{\delta x}{\delta u},\ x_v = \frac{\delta x}{\delta v},\ p = -\frac{f_u}{f},\ q = -\frac{f_v}{f},$$

Digitized by Google

On peut dire, d'une manière plus générale, que si la surface se réduit à un point fixe, les coordonnées x_i vérifient un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$(60)\qquad \begin{aligned} A\,x_u + B\,x_v + C\,x &= 0,\\ A'x_u + B'x_v + C'x &= 0, \end{aligned}$$

A, B, C, A', B', C' étant des fonctions analytiques de u et v.

La réciproque est vraie. Supposons en effet le système (60) *complètement intégrable*, c'est-à-dire qu'il donne, en dérivant, des valeurs *uniques* pour les dérivées des différents ordres, en commençant par celles qui figurent dans le système. L'integrale générale du système dépend alors d'une seule constante arbitraire, la valeur de x pour $u = u_0$, $= v_0$. Or, si $f(u, v)$ est une solution particulière du système, $af(u, v)$ en est une aussi, quel que soit a, c'est donc la solution générale. Si les x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) vérifient (60), elles ont bien la forme (58) et la surface se réduit à un point fixe.

45. *Surface réduite à une courbe.* Une surface se réduit à une courbe seulement dans le cas où les coordonnées du point générateur x sont de la forme

$$(61)\qquad x_i = F_i(t)\,.\,f(u, v),\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

où

$$t = \varphi(u, v).$$

On a alors

$$\frac{\delta x_i}{\delta u} = F'_i\,.\,f\,.\,\varphi_u + F_i\,.\,f_u,$$

$$\frac{\delta x_i}{\delta v} = F'_i\,f\,.\,\varphi_v + F_i\,.\,f_v,$$

d'où l'on conclut aisément que les x_i satisfont à l'équation

$$\begin{vmatrix} x_u & \varphi_u & f_u \\ x_v & \varphi_v & f_v \\ x & 0 & f \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire à une équation de la forme

$$(62)\qquad A\,x_u + B\,x_v + C\,x = 0,$$

A, B, C étant des fonctions de u et v.

Réciproquement, si les x_i vérifient une équation de cette forme, la surface décrite par x se réduit à une courbe. En effet, l'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$x = f(u, v)\,.\,F[\varphi(u, v)],$$

où f et φ sont des fonctions déterminées de u et v et F une fonction arbitraire de φ. Les x_i ont bien la forme (61), qui prouve que la surface se réduit à une courbe.

Digitized by Google

46. Nous allons considérer encore un cas particulier intéressant. Nous supposerons que la surface est proprement dite (elle ne se réduit ni à un point fixe, ni à une courbe), mais qu'elle est plane. Pour qu'il en soit ainsi il est nécessaire et suffisant que les coordonnées du point générateur x soient de la forme

$$x_i = c' x_i' + c'' x_i'' + c''' x_i''' , \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

les x_i', x_i'', x_i''' étant des constantes — les coordonnées de trois points fixes du plan — et les c des fonctions de u et v

$$c' = f(u, v), \quad c'' = g(u, v), \quad c''' = h(u, v).$$

On a alors

$$(63) \quad \begin{aligned} x_i &= x_i' f + x_i'' g + x_i''' h , \\ \frac{\delta x_i}{\delta u} &= x_i' f_u + x_i'' g_u + x_i''' h_u , \\ \frac{\delta x_i}{\delta v} &= x_i' f_v + x_i'' g_v + x_i''' h_v . \end{aligned}$$

Entre ces relations ou ne peut pas éliminer x_i', x_i'', x_i''', car il faudrait avoir

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{vmatrix} = 0 ,$$

mais alors f, g, h vérifieraient une équation de la forme (62), à laquelle satisferaient aussi les x_i et la surface se réduirait à une courbe ou à un point fixe, ce qui est contre l'hypothése.

Pour pouvoir éliminer les constantes x_i', x_i'', x_i''' nous sommes obligés de prendre les dérivées secondes

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 x_i}{\delta u^2} &= x_i' f_{uu} + x_i'' g_{uu} + x_i''' h_{uu} , \\ \frac{\delta^2 x_i}{\delta u \, \delta v} &= x_i' f_{uv} + x_i'' g_{uv} + x_i''' h_{uv} , \\ \frac{\delta^2 x_i}{\delta v^2} &= x_i' f_{vv} + x_i'' g_{vv} + x_i''' h_{vv} . \end{aligned}$$

En faisant l'élimination on en conclut que dans le cas où la surface décrite par x est plane, les x_i vérifient un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$(64) \quad \begin{aligned} x_{uu} &= a_1 x_u + b_1 x_v + c_1 x , \\ x_{uv} &= a_2 x_u + b_2 x_v + c_2 x , \\ x_{vv} &= a_3 x_u + b_3 x_v + c_3 x , \end{aligned}$$

les a, b, c étant des fonctions déterminées de u et v.

Réciproquement, si les x_i vérifient un tel système, le point x décrit une surface plane, le système étant supposé *complètement intégrable*. En vertu de cette

Digitized by Google

condition le système (64) et les égalités qu'on en déduit par des dérivations successives donnent des valeurs *uniques* pour les dérivées secondes et pour celles d'ordres supérieurs, en supposant qu'on se donne pour $u = u_0$, $v = v_0$ les valeurs de x, x_u, x_v L'intégrale générale du système (64) dépend donc de trois constantes arbitraires.

Comme le système est linéaire, on peut donner aisément la forme de l'intégrale générale. Si $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ sont trois solutions linéairement indépendantes de (64), l'intégrale générale est

$$x = x'f + x''g + x'''h,$$

x', x'', x''' étant trois constantes arbitraires. Les coordonnées x_i vérifiant (64) ont bien la forme (63) et la surface est plane.

47. *Coordonnées curvilignes sur une surface.* Soit S une surface proprement dite de l'espace projectif E_{n-1}. Les coordonnées projectives d'un point générateur x de la surface sont des fonctions de deux paramètres

$$(65) \quad x_i = f_i(u, v), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

qui ne vérifient pas une équation aux dérivées partielles de la forme (62).

Lorsqu'on se donne la valeur v_0 de v, le point x décrit, en général, une courbe tracée sur la surface S. Dans des cas particuliers cette courbe peut se réduire à un point. Nous dirons dans tous les cas que l'on a sur S une courbe $v = v_0$. Dans le cas où la courbe $v = v_0$ est proprement dite, nous dirons que c'est une courbe u, pour rappeler que le long de cette courbe le paramètre u seul varie.

On définit de la même manière les courbes $u =$ const. ou les courbes v, le long desquelles v seul varie.

Un point (u_0, v_0) de la surface est ainsi déterminé comme le point commun des courbes $u = u_0$ et $v = v_0$. Nous dirons que u_0 et v_0 sont *les coordonnées curvilignes* de ce point et que les courbes u et v sont *les courbes coordonnées* de la surface S.

On peut évidemment changer le système des coordonnées curvilignes sur S sans changer les courbes coordonnées. Il suffit de poser

$$u = f(\alpha), \; v = g(\beta).$$

Il est clair d'ailleurs que c'est là la transformation la plus générale — f et φ étant des fonctions arbitraires — qui laisse *invariantes* les courbes coordonnées.

48. *Plan tangent.* Soit S la surface déterminée par (65). Le long d'une courbe C tracée sur la surface, v est nécessairement fonction de u, ou bien u et v sont fonctions d'un même paramètre t.

En supposant que la courbe C soit définie en prenant u et v comme fonctions

Digitized by Google

de t, la tangente à C en un point x est déterminée par x et par le point x' de coordonnées

$$x'_i = \frac{\delta x_i}{\delta u} u' + \frac{\delta x_i}{\delta v} v', \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

où

$$u' = \frac{du}{dt}, \; v' = \frac{dv}{dt}$$

Pour abréger nous écrirons, en supprimant les indices

$$(66) \quad x' = x_u . u' + x_v . v'.$$

La tangente à la courbe u (v = const.) est la droite xx_u, celle à la courbe v est xx_v.

En général les points x, x_u et x_v déterminent un plan. Comme, en vertu de (66), le point x', qui définit la tangente xx' à la courbe C, est situé sur la droite $x_u x_v$, on en conclut que la tangente xx' est contenue dans le plan $xx_u x_v$. Ce plan contient donc toutes les tangentes en x aux courbes tracées sur S et passant par x: c'est *le plan tangent* à S au point x.

Il n'y a d'exception que si les points x, x_u, x_v sont en ligne droite ou se confondent, ce qui ne peut arriver qu'en des points particuliers de S — *points singuliers* de la surface ou du système de coordonnées curvilignes —, autrement les x_i vérifieraient au moins une équation de la forme (62) et la surface se réduirait à une courbe ou à un point fixe.

49. *Surfaces coniques.* On appelle *surface conique* une surface décrite par une droite passant par un point fixe a et s'appuyant sur une courbe donnée C; a est le *sommet* de la surface conique et C en est la *base.* Evidemment toute courbe tracée sur la surface peut être considérée, en général, comme base ou comme directrice de la surface.

On peut représenter la surface conique par

$$x_i = f_i(u) + a_i v, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les courbes v (u = const.) sont les génératrices rectilignes, la courbe $v = \infty$ se réduit au point a (le sommet de la surface).

On voit immédiatement que le plan tangent en un point x (u, v) est défini par les points a, $f(u)$, $f'(u)$ de coordonnées

$$a_i, \; f_i(u), \; f'_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le plan tangent ne varie pas lorsque x décrit une génératrice u = const. de la surface.

50. *Surfaces développables.* On appelle *développable* une surface formée par

Digitized by Google

les tangentes d'une courbe, *l'arête de rebroussement* de la développable. On peut représenter une telle surface par

$$(66) \quad x_i = f_i(u) + v f'_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

la courbe $v = 0$ étant l'arête de rebroussement et les courbes $u = \text{const.}$ les génératrices rectilignes de la surface.

Le plan tangent en un point $x(u, v)$ de la surface est déterminé par les points $f(u)$, $f'(u)$ et $f''(u)$ de coordonnées

$$f_i(u), \; f'_i(u), \; f''_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

il se confond avec le L_2-osculateur au point correspondant de l'arête de rebroussement. Ce plan ne varie donc pas le long d'une même génératrice rectiligne de la surface.

Il est intéressant de remarquer que les expressions (66) de x_i vérifient le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$v\, x_{uv} - x_u + x_v = 0, \; x_{vv} = 0.$$

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

RÉSEAUX.

I. RÉSEAUX TRACÉS SUR UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

51. *Tangentes conjuguées d'une quadrique.* C'est *Charles Dupin* (en 1813) qui le premier a introduit la notion de tangentes conjuguées d'une surface quelconque de notre espace (*Développements de géométrie*). Nous y arriverons en partant du cas simple où la surface est du second ordre.

Considérons, dans un espace projectif E_3 à trois dimensions, une surface du second ordre Ω sans points singuliers. On sait que par la méthode des polaires réciproques on peut faire correspondre, par rapport à Ω, à un point un plan, à un plan un point, à une droite une autre droite, à une courbe une surface développable etc.

La droite D', qui correspond ainsi à une droite donnée D, s'appelle la droite polaire ou *la droite conjuguée* de D. Les droites conjuguées D et D' sont réciproques. Par D' passent tous les plans polaires, par rapport à Ω, des différents points de D; de même par D passent les plans polaires des points de D'.

Si, en particulier, D est tangente à Ω en un point M, D' l'est aussi au même point. On appelle alors D et D' *tangentes conjuguées* de Ω. Si D est une génératrice de Ω, D' se confond avec elle.

Il résulte de cette définition, que l'on peut obtenir la tangente D', conjuguée de la tangente D en M, de la manière suivante: Prenons sur Ω un point M' voisin de M. Les plans tangents en M et M' à Ω se coupent suivant la droite Δ' conjuguée de MM'. Lorsque M' tend vers M, de manière que MM' tende vers D, Δ' tend vers la tangente cherchée D'.

52. *Définition d'un réseau d'une quadrique.* Supposons que l'on ait sur la quadrique Ω deux familles de courbes, telles que, au moins dans une région R de la surface, par chaque point passe une courbe de chaque famille.

On dira que ces deux familles de courbes tracent sur Ω un réseau, si les deux tangentes, aux courbes qui passent par chaque point de la région R, *sont des tangentes conjuguées de Ω.*

Digitized by Google

53. *Propriété fondamentale.* Etant donné un réseau tracé sur la quadrique Ω, soit C une courbe appartenant à une des deux familles qui composent le réseau.

Les plans tangents à Ω le long de C forment évidemment une surface développable Δ, dont les génératrices, selon la construction précédente (no. 51), sont les tangentes de Ω conjuguées à celles de C. Il est manifeste d'ailleurs que Δ est la développable que l'on obtient en transformant C par polaires réciproques par rapport à Ω. Si, en particulier, C est une conique de Ω, Δ est le cône circonscrit à Ω le long de C.

On a ainsi le résultat suivant:

Les tangentes aux courbes d'une des familles qui composent un réseau d'une quadrique, aux points où ces courbes rencontrent une courbe quelconque C *de l'autre famille, sont les génératrices d'une surface développable, c'est-à-dire elles sont tangentes à une même courbe* C_1 *(variable avec* C*), ou elles passent par un même point (qui varie avec* C*).*

Réciproquement, on peut prendre cette propriété fondamentale comme nouvelle définition d'un réseau tracé sur une quadrique. Cependant il y a une remarque importante à faire. Comme les tangentes conjuguées sont réciproques, il suffit que la propriété précédente ait lieu pour une seule des familles de courbes. pour qu'elle soit satisfaite aussi pour l'autre.

II. RÉSEAUX DANS UN E_{n-1}.

54. *Définition.* La propriété fondamentale d'un réseau, tracé sur une quadrique de notre espace, peut être prise comme point de départ pour généraliser cette notion, non seulement dans un espace projectif à trois dimensions, mais dans un E_{n-1}. On obtient alors la définition générale suivante:

Considérons sur une surface S *d'un espace projectif* E_{n-1} *deux familles de courbes, telles que, au moins dans une région* R *de* S, *par chaque point* M *il passe une courbe de chaque famille. Si les courbes d'une des familles jouissent de la propriété que leurs tangentes, aux points où ces courbes rencontrent toute courbe de l'autre famille, forment une surface développable, on dira que ces deux familles de courbes constituent un réseau de* S.

Cette définition n'est pas symétrique par rapport aux deux familles de courbes du réseau. Cependant la symétrie existe et elle sera mise en évidence un peu plus loin par la voie du calcul. Elle résulte d'ailleurs de la remarque intuitive suivante:

Si l'on a sur la surface S de E_{n-1} quatre points infiniments voisins A, B, C, D tels que les droites AB et CD se rencontrent, il en est de même de AC et BD.

De la définition générale que nous venons de donner, il résulte particulièrement que deux familles quelconques de courbes, situées dans un même plan et jouissant seulement de la propriété que par chaque point d'une certaine région R de leur plan il passe une courbe de chaque famille, constituent un réseau.

Digitized by Google

55. *Courbes coordonnées formant un réseau.* Si l'on suppose que sur la surface S de E_{n-1} les courbes coordonnées u et v forment un réseau, alors les coordonnées projectives

$$x^{(i)} = f_i(u, v), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

— où, pour des motifs que nous verrons plus loin, nous avons employé des indices supérieurs — jouissent, par rapport à u et v de propriétés spéciales.

Partons de la définition du réseau. La tangente xx_v à la courbe v le long de toute courbe u, doit former une surface développable (ou conique). Il doit donc exister sur la droite xx_v un point x_1 qui, pour v = const., décrive une courbe tangente à cette droite ou reste fixe.

Or, les coordonnées de x_1 sont de la forme

$$x_1^{(i)} = x_v^{(i)} + a\, x^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ou encore, pour simplifier l'écriture,

$$(1) \quad x_1 = x_v + a\, x,$$

$a(u, v)$ étant une fonction à déterminer, de manière que le point x_1, lorsque u varie seul, reste fixe ou décrive une courbe tangente à xx_v. Dans le premier cas on doit avoir

$$(x_1)_u = \lambda\, x_1;$$

dans le second

$$(2) \quad (x_1)_u = \lambda\, x_v + \mu\, x,$$

ce dernier comprenant le premier pour $\mu = \lambda a$.

En remplaçant dans (2) x_1 par sa valeur (1), on a le résultat suivant:

Si les courbes coordonnées u et v forment sur une surface S *de* E_{n-1} un *réseau. les coordonnées projectives* $x^{(i)}$ *du point générateur* x *de* S *vérifient une équation de la forme*

$$(3) \quad x_{uv} + a\, x_u + b\, x_v + cx = 0$$

Réciproquement, supposons que les coordonnées projectives $x^{(i)}$ $(i = 1, 2 \ldots, n)$, du point générateur x de S, vérifient l'équation (3), je dis que les courbes coordonnées u et v tracent sur S un réseau. En effet, le point x_1 défini par (1), où a est le coefficient de x_u dans (3), vérifie l'équation (2), avec

$$\lambda = -b, \quad \mu = a_u - c,$$

ce qui suffit pour que le théorème soit démontré. On voit de là encore que la développable décrite par $x x_v$ lorsque v = const. se réduit à une surface conique si l'on a $\mu = \lambda a$, ou

$$(4) \quad h = a_u + a\, b - c = 0.$$

Si l'on considère maintenant la tangente xx_u à la courbe u du réseau, on

Digitized by Google

vérifie aisément qu'elle aussi décrit, lorsque v varie seul, une surface développable ou conique, à savoir le point

$$x_{-1} = x_u + b\,x$$

décrit une courbe tangente à $x\,x_u$ ou reste fixe pour $u = \text{const.}$, le dernier cas ayant lieu si

$$(5) \quad k = b_v + a\,b - c = 0.$$

On voit ainsi que la propriété qui nous a servi à définir le réseau est symétrique ; si elle appartient à une des familles du réseau, elle appartient aussi à l'autre.

III. SURFACES AYANT DES RÉSEAUX.

56. Nous venons de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes coordonnées u et v d'une surface S de E_{n-1} forment un réseau ; il faut et il suffit que les coordonnées projectives du point générateur x vérifient une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène et du second ordre, de la forme (3).

Prenons maintenant sur S deux familles quelconques de courbes, que l'on peut représenter par

$$F(u, v, \alpha) = 0, \quad G(u, v, \beta) = 0,$$

et si l'on suppose que par chaque point x d'une région ϱ de S, intérieure à la région où le réseau (u, v) est défini, passe une courbe de chaque famille, on pourra tirer α et β comme fonctions de u et v et réciproquement.

On obtient ainsi sur S un nouveau système de coordonnées curvilignes (α, β). Si l'on fait maintenant dans (3) le changement des variables indépendantes, en introduisant les nouvelles variables α et β et en remarquant que l'on a

$$x_u = x_\alpha . \alpha_u + x_\beta . \beta_u\,, \quad x_v = x_\alpha . \alpha_v + x_\beta . \beta_v\,,$$

$$x_{uv} = x_{\alpha\alpha}\,\alpha_u\alpha_v + x_{\alpha\beta}(\alpha_u\beta_v + \beta_u\alpha_v) + x_{\beta\beta}\,\beta_u\beta_v + x_\alpha . \alpha_{uv} + x_\beta\,\beta_{uv},$$

cette équation prend la forme suivante

$$(6) \quad A\,x_{\alpha\alpha} + 2B\,x_{\alpha\beta} + C\,x_{\beta\beta} + 2D\,x_\alpha + 2E\,x_\beta + F\,x = 0.$$

Dans le cas où $A = C = 0$ les nouvelles courbes coordonnées forment aussi un réseau. En tout cas on a la proposition suivante:

La condition nécessaire pour que sur la surface S, *de l'espace projectif* E_{n-1}, *il y ait un réseau, est que, la surface étant rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes* (α, β), *les coordonnées projectives* $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *du point générateur* x *vérifient une équation de la forme* (6).

Il faut voir maintenant si cette condition nécessaire est en même temps suffisante. On devra pouvoir déterminer un changement de variables de manière que l'équation (6) prenne la forme (3). Or, en introduisant de nouvelles variables

Digitized by Google

(u, v), l'équation (6) garde la même forme. Le nouveau système sera un réseau, si les coefficients de x_{uu} et x_{vv} sont nuls, c'est-à-dire si l'on a

$$A u_\alpha^2 + 2B u_\alpha u_\beta + C u_\beta^2 = 0,$$
$$A v_\alpha^2 + 2B v_\alpha v_\beta + C v_\beta^2 = 0,$$

ce qui prouve que les deux familles de courbes $u(\alpha, \beta) = \text{const.}$ et $v(\alpha, \beta) = \text{const.}$ qui composent le réseau, s'il existe, sont les deux familles d'intégrales de l'équation

$$A d\beta^2 - 2B d\alpha d\beta + C d\alpha^2 = 0.$$

Ces deux familles de courbes, que l'on appelle *les caractéristiques* de l'équation (6), sont distinctes si l'on a

$$B^2 - AC \neq 0.$$

C'est cette dernière condition qu'il faut ajouter à l'équation (6), pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un réseau sur la surface S. On peut donc énoncer le résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un réseau sur une surface S *de* E_{n-1}, *est que le point générateur* x, *rapporté à un système de coordonnées curvilignes quelconque* (α, β), *vérifie*[1]) *une équation du second ordre de la forme* (6) *à caractéristiques distinctes.*

57. Il résulte de ce qui précède que les surfaces S d'un E_{n-2} (pour n assez grand), ayant des réseaux, sont des surfaces particulières. Nous allons étudier cette question de plus près.

Tout d'abord, comme nous l'avons déjà remarqué (no. 54) et comme le prouve le système (64) du no. 46, tout système de coordonnées curvilignes dans un plan forme un réseau.

On peut dire encore qu'un système de la forme (64) du no. 46 définit, s'il est complètement intégrable, un *réseau plan.*

58. *Réseaux d'un* E_3. Les coordonnées projectives $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ d'un point x qui décrit une surface S d'un E_3 vérifient une infinité d'équations de la forme (6). En effet, si l'on écrit que les $x^{(i)}$ satisfont à (6), on obtient quatre équations pour déterminer les rapports des six coefficients de (6) à l'un d'entre eux. D'une manière plus précise, si

$$(7) \quad L = 0, \; L' = 0$$

sont deux équations déterminées de la forme (6), qui sont vérifiées par les $x^{(i)}$, l'équation la plus générale de cette forme qui soit vérifiée par les mêmes quantités est

$$(8) \quad L + \lambda L' = 0,$$

[1]) Cette manière elliptique de s exprimer, qui simplifie le langage et dont nous nous servirons souvent, est suffisament claire, pour qu'il y ait besoin d'une explication.

Digitized by Google

où λ est une fonction arbitraire de α et β. On voit ainsi que *sur toute surface* S *de* E_3 *il y a une infinité de réseaux.*

On peut, en général, déterminer λ de manière qu'une des familles de caractéristiques de (8) soit une famille de courbes donnée.

Il y a cependant un cas d'exception ou plutôt d'indétermination, lorsque les caractéristiques des équations (7) ont une famille de courbes en commun. Tous les réseaux de la surface ont en commun cette famille, qui forme ainsi, avec n'importe quelle autre famille de courbes tracée sur la surface, un réseau. Si l'on prend dans ce cas les caractéristiques communes de (7) pour courbes v (u = const.) et une autre famille de courbes pour courbes u, on peut réduire le système (7) à la forme

$$(9)\quad \begin{cases} x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0, \\ x_{vv} + p\,x_u + q\,x_v + r\,x = 0. \end{cases}$$

Nous prouverons plus loin (no. 60) que toute surface, d'un E_{n-1}, qui vérifie un pareil système est développable.

59. *Réseaux d'un* E_4. Une surface S de E_4 vérifie *en général* une seule équation de la forme (6), parceque, à l'aide des $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$), on peut en général déterminer les coefficients de (6) — à un facteur près —, de manière que cette équation admette les $x^{(i)}$ comme solutions. *Dans ce cas général et si les caractéristiques de* (6) *sont distinctes, la surface* S *possède un seul réseau.*

Il y a deux exceptions à ce cas général: ou bien les caractéristiques de la seule équation (6) vérifiée par les $x^{(i)}$ sont confondues et alors S n'a pas de réseau, ou bien les $x^{(i)}$ vérifient deux équations de la forme (6) et nous verrons plus loin qu'alors S est développable et a une infinité de réseaux.

60. *Réseaux d'un espace projectif* E_{n-1}. Pour une surface S d'un espace E_{n-1}, $n > 5$, il est en général impossible de déterminer les coefficients de l'équation (6), de manière qu'elle soit vérifiée par les coordonnées $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) d'un point générateur de S. On a donc le résultat suivant:

Sur une surface S *d'un espace* E_{n-1}, $n > 5$, *il n'y a pas, en général, de réseau.*

Il y a deux exceptions à ce cas général: ou bien S vérifie une seule équation de la forme (6) à caractéristiques distinctes et alors cette surface a un seul réseau, ou bien elle en vérifie deux et alors S a une infinité de réseaux. Nous allons démontrer que dans ce dernier cas S est développable.

Comme sur S il y a une infinité de réseaux, prenons-en un comme coordonnées curvilignes (u, v); alors le système vérifié par S peut être réduit à la forme

$$(10)\quad \begin{cases} x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0, \\ \mathrm{A}\,x_{uu} + \mathrm{C}\,x_{vv} + 2\,\mathrm{D}\,x_u + 2\,\mathrm{E}\,x_v + \mathrm{F}\,x = 0, \end{cases}$$

que nous allons étudier.

Digitized by Google

Si $AC \neq 0$, la première équation donne, par dérivation, les dérivées x_{uuv} et x_{uvv}, la seconde les dérivées x_{uuu} et x_{vvv}. L'intégrale générale du système dépendra donc de 4 constantes au plus — les valeurs pour $u = u_0$, $v = v_0$ de x, x_u, x_v et d'une des dérivées x_{uu}, x_{vv}. Comme le système est linéaire, il aura, dans ce cas, tout au plus 4 solutions linéairement indépendantes. La surface S appartiendra par conséquent à un espace E_3 à trois dimensions ou sera plane. D'une manière précise, *si le système* (10) *est complètement intégrable, il définit, à une transformation projective près, une surface* S *de* E_3 *sur laquelle les courbes u et v tracent un réseau.*

Si la surface qui vérifie le système (10) appartient à un espace E_{n-1}, $n > 4$, sans appartenir à un E_3, alors on a $A = 0$ ou $C = 0$. On ne peut pas avoir $A = C = 0$ car S se réduirait à une courbe (no. 45).

On peut toujours choisir les variables u et v de manière que l'on ait $A = 0$ et alors le système (10) se réduit au système (9), que nous écrivons, pour abréger sous la forme

$$(9') \quad L = 0, \quad L' = 0.$$

Les équations

$$L_u = 0, \; L_v = 0, \; L'_u = 0, \; L'_v = 0,$$

obtenues de (9') par dérivation, donnent les dérivées troisièmes de x. Cependant une de celles-ci, x_{uvv}, est obtenue deux fois, tandisque x_{uuu} n'est pas donnée du tout. En égalant les deux valeurs de x_{uvv}, après avoir remplacé x_{uu} et x_{vv} par leurs valeurs tirées de (9), on obtient une égalité de la forme

$$p\, x_{uu} + p' x_u + q' x_v + r' x = 0.$$

Si $p \neq 0$, cette équation et (9) forment un système de la forme (64) du no. 46, et la surface S serait plane.

Si $p = 0$, sans que p', q' r' soient nuls, S serait une courbe. En laissant de côté ces cas, on a nécessairement

$$p = p' = q' = r' = 0$$

c'est-à-dire

$$p = 0, \; a_v - r = a\,(a - q), \; b_v - a\,b + c = q_u, \; c_v - a\,c = r_u + b\,r - c\,q.$$

La deuxième équation du système (9) se réduit à

$$x_{vv} + q\, x_v + r\, x = 0,$$

qui prouve (no. 31) que les courbes v ($u = \text{const.}$) de S sont des lignes droites: *la surface* S *est donc réglée.*

Prenons maintenant le point x_1 donné par

$$x_1 = x_v + ax.$$

Digitized by Google

On a

$$\frac{\delta x_1}{\delta u} = x_{uv} + a\,x_u + a_u\,x = -b\,x_1 + (a_u + a\,b - c)\,x$$
$$= -b\,x_1 + h\,x$$

et

$$\frac{\delta x_1}{\delta v} = x_{vv} + a\,x_v + a_v\,x$$
$$= (a - q)\,x_v + (a_v - r)\,x = (a - q)\,(x_v + a\,x)$$
$$= (a - q)\,x_1.$$

Il en résulte que si $h = 0$, x_1 est fixe et la surface S est conique; si $h \neq 0$, x_1 décrit une courbe tangente aux génératrices rectilignes de S et alors cette surface est développable. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Toute surface S, *d'un espace projectif* E_{n-1}, $n > 4$, *qui vérifie un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires et homogènes, est une surface conique ou développable.*

Comme, dans le cas $n \geqslant 5$, la condition d'avoir une famille de caractéristiques commune est une conséquence des autres conditions, on a aussi la proposition:

Toute surface S, *d'un espace* E_{n-1}, $n \geqslant 5$, *qui vérifie un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires et homogènes, est une surface conique ou développable.*

61. *Réseaux.* Nous venons d'établir que sur une surface générale S de E_{n-1}, $n > 5$, il n'y a pas de réseau. Par rapport à la notion de surface celle de réseau est particulière. Aussi, dans ce qui suit, nous parlerons rarement de la surface sur laquelle est tracé le réseau dont nous nous occuperons.

Nous désignerons le réseau décrit par le point x par (x), ou, pour mettre en évidence les deux familles de courbes qui composent la réseau, par (u, v).

IV. EQUATION DE LAPLACE.

62. *Historique.* L'équation aux dérivées partielles

$$(11) \quad x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0,$$

liée si étroitement à la théorie des réseaux, a été étudiée par bien des géomètres.

C'est d'abord *Euler* (Institutiones Calculi Integralis, III) qui a montré que si l'on a une des relations

$$h = a_u + a\,b - c = 0, \quad k = b_v + a\,b - c = 0,$$

l'équation peut se réduire, comme nous le verrons plus loin, à l'une ou l'autre des formes

$$x_{uv} + b\,x_v = 0, \quad x_{uv} + a\,x_u = 0.$$

Digitized by Google

Cependant c'est *Laplace* (Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles, 1773) qui a imaginé une méthode — *la méthode de Laplace ou des cascades* — pour intégrer l'équation (11), que nous appellerons dorénavant *l'équation de Laplace*. Il obtient deux suites d'équations analogues à (11). Si une de ces suites s'arrête, l'équation (11) est intégrable.

Le problème général de former l'équation de Laplace, dont une des suites ou toutes les deux s'arrêtent, a été étudié d'abord par *Moutard*, ensuite par M. *Darboux*.

M. *Darboux*, après un cas particulier traité par *L. Lévy*, a donné une méthode générale de déduire de (11), d'autres équations analogues. Toutes ces questions, de même que la méthode spéciale pour transformer les équations à invariants égaux ($h = k$), imaginée par *Moutard*, avec leurs appliquations géométriques, sont amplement développées dans le Tome II de la *Théorie des surfaces* de M. *Darboux*.

Une autre forme géométrique a été donnée à ces résultats par M. *Bompiani*, qui a enrichi, lui et les élèves de M. *Segre*, la géométrie différentielle projective de bien des résultats élégants.

Bien que les travaux de M. *Guichard* sur les réseaux ont un caractère métrique, ils sont trop importants pour être passés sous silence. Pour la première fois M. *Guichard* a introduit dans la théorie des réseaux d'un espace à n dimensions une nomenclature régulière, que nous adopterons dans ce qui suit.

Enfin, pour revenir à l'équation (11), nous mentionnons la méthode de *Riemann*, pour déterminer une intégrale par des conditions à la limite. Cette méthode, exposée aussi dans le livre de M. *Darboux*, a été complétée par M. *Picard* et *Hadamard* et dernièrement, à l'aide de la théorie des équations intégrales, par d'autres géomètres.

63. *Invariants de l'équation de Laplace.* Posons

$$\mathrm{L}(x) \equiv x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x$$

et appliquons à l'équation (11) la transformation $x = \lambda\,x'$, λ étant une fonction arbitraire de u et v. On obtient une équation de la même forme que (11)

$$(12)\qquad x'_{uv} + a'\,x'_u + b'\,x'_v + c'\,x' = 0$$

où

$$(13)\qquad a' = a + \frac{\lambda_v}{\lambda},\ b' = b + \frac{\lambda_u}{\lambda},\ c' = c + \frac{\lambda_{uv}}{\lambda} + a\frac{\lambda_u}{\lambda} + b\frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{L}(\lambda),$$

d'où il résulte qu'on a $c' = 0$ seulement si λ est une solution de (11).

Calculons pour (12) les expressions

$$h' = a'_u + a'\,b' - c',\ k' = b'_v + a'\,b' - c'$$

analogues aux expressions h et k pour (11). On obtient aisément

$$(14)\qquad h' = h,\quad k' = k$$

Digitized by Google

c'est-à-dire *h et k sont des invariants absolus de l'équation* (11) *pour la transformation* $x = \lambda x'$.

Je dis que réciproquement si l'on a les relations (14), on peut trouver une transformation $x = \lambda x'$ qui change l'équation (11) en (12). En effet, on peut écrire (14) sous la forme

$$(a' - a)_u = (b' - b)_v = (c' - a'b') - (c - ab),$$

d'où il résulte d'abord que l'on peut trouver par quadratures une fonction λ telle que l'on ait

$$(\log \lambda)_v = a' - a, \quad (\log \lambda)_u = b' - b,$$

à savoir

$$\lambda = e^{\int (b' - b)\, du + (a' - a)\, du}.$$

Il suffit maintenant de vérifier que, avec cette valeur de λ, la transformation $x = \lambda x'$ change (11) en (13). Or, ceci revient à constater que λ, que nous venons de déterminer, satisfait aux relations (13), ce qui est facile de vérifier.

On déduit de là que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (11) puisse être ramenée à l'une des formes intégrables

$$x'_{uv} + b' x'_v = 0, \quad x'_{uv} + a' x_u = 0$$

est $h = 0$ pour la première forme, $k = 0$ pour la seconde.

Considérons l'équation

$$(15) \qquad x'_{uv} - m x' = 0,$$

on a

$$h' = k' = m.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant: *On peut réduire l'équation* (11), *par une transformation* $x = \lambda x'$, *à la forme simple* (15), *seulement dans le cas où les invariants h et k de* (11) *sont égaux, et cette condition est suffisante.*

64. *Invariants relatifs.* Si l'on fait dans (11) un changement des variables indépendantes

$$u = f(\alpha), \quad v = g(\beta),$$

cette équation de Laplace devient

$$x_{\alpha\beta} + A x_\alpha + B x_\beta + C x = 0,$$

où

$$A = a v', \quad B = b u', \quad C = c u' v', \quad u' = \frac{du}{d\alpha} = f'(\alpha), \quad v' = \frac{dv}{d\beta} = g'(\beta).$$

Calculons les invariants de la nouvelle équation de Laplace

$$H = A_\alpha + A B - C, \quad K = B_\beta + A B - C,$$

on trouve

$$H = h u' v' = h f'(\alpha) g'(\beta), \quad K = k f'(\alpha) g'(\beta),$$

Digitized by Google

ce qui prouve que, *pour un changement des variables indépendantes, h et k sont des invariants relatifs.*

65. *La méthode de Laplace.* On peut écrire l'équation (11) sous l'une des deux formes suivantes

$$(x_v + a\,x)_u + b\,(x_v + a\,x) = h\,x,$$
$$(x_u + b\,x)_v + a\,(x_u + b\,x) = k\,x,$$

ou encore, en posant

$$x_1 = x_v + a\,x,\ x_{-1} = x_u + b\,x,$$

sous une des formes

$$(x_1)_u + b\,x_1 = h\,x,\ (x_{-1})_v + a\,x_{-1} = k\,x.$$

On voit de là que si $h = 0$, on a x_1 par une quadrature

$$x_1 = \mathrm{V}\,e^{\int b\,du},$$

V étant une fonction arbitraire de la variable v seulement; l'égalité

$$x_v + a\,x = x_1 = \mathrm{V}\,e^{\int b\,du}$$

déterminera x. On aura ainsi l'intégrale générale de (11)

$$x = e^{-\int a\,dv}\left[\mathrm{U} + \int \mathrm{V}\,e^{\int (a\,dv - b\,du)}dv\right],$$

U étant une fonction arbitraire de u.

On obtient de la même manière l'intégrale générale de (11) si, au lieu de $h = 0$, on a $k = 0$.

Supposons maintenant que l'on ait $h \neq 0$ et éliminons x entre les équations

$$(x_1)_u + b\,x_1 = h\,x,\ x_1 = x_v + a\,x,$$

on trouvera que x_1, vérifie, comme x, une équation de Laplace

$$(16)\quad (x_1)_{uv} + a_1\,(x_1)_u + b_1\,(x_1)_v + c_1\,x_1 = 0,$$

— *la transformée de* (11) *dans le sens de la variable* v —, où

$$a_1 = a - \frac{h_v}{h},\ b_1 = b,\ c_1 = c - a_u + b_v - b\,\frac{h_v}{h}.$$

A toute solution x de (11), la relation

$$x_1 = x_v + a\,x$$

fait correspondre une solution x_1 de (16) et à toute solution x_1 de (16), la relation

$$(x_1)_u + b\,x_1 = h\,x$$

Digitized by Google

fait correspondre une solution de (11). La solution x_1 sera dite la transformée de Laplace de x dans le sens de la variable v. Remarquons encore que les invariants de (16) sont

$$h_1 = 2h - k - (\log h)_{uv}, \quad k_1 = h.$$

En supposant $k \neq o$ et en éliminant x entre les équations

$$(x_{-1})_v + a\,x_{-1} = k\,x, \quad x_{-1} = x_u + b\,x,$$

on trouve que x_{-1} satisfait à l'équation de Laplace

$$(17) \quad (x_{-1})_{uv} + a_{-1}(x_{-1})_v + b_{-1}(x_{-1})_v + c_{-1}\,x_{-1} = 0$$

— la tranformée de (11) dans le sens de la variable u —, où

$$a_{-1} = a, \quad b_{-1} = b - \frac{k_u}{k}, \quad c_{-1} = c - b_v + a_u - a\frac{k_u}{k}$$

et les invariants

$$h_{-1} = k, \quad k_{-1} = 2k - h - (\log h)_{uv}.$$

La méthode de Laplace permet ainsi — lorsque $hk \neq o$ — de transformer l'équation (11) en deux nouvelles équations de Laplace, dont les solutions correspondent univoquement à celles de (11). Si $h_1 = o$, (16), donc (11), est intégrable.

Si l'on applique maintenant la méthode de Laplace à l'équation (16), en supposant $h_1 \neq o$, on obtient deux autres équations transformées, une dans le sens de la variable v, l'autre dans le sens de la variable u. Comme pour cette dernière on a

$$(x_1)_{-1} = (x_1)_u + b_1\,x_1 = (x_1)_u + b\,x_1 = h\,x,$$

on voit qu'elle se ramène à (11) par une transformation de le forme $x' = hx$. Ce n'est donc que la transformation dans le sens de la variable v de (16)

$$x_2 = (x_1)_v + a_1\,x_1$$

qui donne une équation de Laplace essentiellement nouvelle

$$(x_2)_{uv} + a_2(x_2)_u + b_2(x_2)_v + c_2\,x_2 = 0,$$

où

$$a_2 = a_1 - \frac{(h_1)_v}{h_1}, \quad b_2 = b_1 = b, \quad c_2 = c_1 - (a_1)_u + (b_1)_v - b_1\frac{(h_1)_v}{h_1}$$

et les invariants

$$h_2 = 2h_1 - k_1 - (\log h_1)_{uv}, \quad k_2 = h_1.$$

Si $h_2 = o$ on a x_2, d'où x_1 et enfin x, par quadratures. Si $h_2 \neq o$, on peut continuer. La formule de récurence est

$$x_i = (x_{i-1})_v + a_{i-1}\,x_{i-1}, \quad i \geqslant 1$$

Digitized by Google

et x_i vérifie, si $h_{i-1} \neq o$, l'équation

$$(x_i)_{uv} + a_i\,(x_i)_u + b_i\,(x_i)_v + c_i\,x_i = 0,$$

ou

$$a_i = a_{i-1} - (\log h_{i-1})_u\,,\ b_i = b\,,\ c_i = c_{i-1} - (a_{i-1})_u + (b_{i-1})_v - b_{i-1}\,(\log h_{i-1})_v$$

et les invariants

$$h_i = 2\,h_{i-1} - k_{i-1} - (\log h_{i-1})_{uv},\ k_i = h_{i-1}\,.$$

Dans le cas où $h_i = o$ l'équation (11) est intégrable par la méthode de Laplace, si $h_i \neq o$ on peut continuer dans le même sens.

Nous venons d'expliquer dans tous ses détails le mécanisme de la méthode de Laplace dans le sens de la variable v. Le même mécanisme s'applique dans le sens de la variable u. On a en général

$$x_{-i} = (x_{-i+1})_u + b_{-i+1}\,x_{-i+1}\,,$$

qui satisfait à

$$(x_{-i})_{uv} + a_{-i}\,(x_{-i})_u + b_{-i}\,(x_{-i})_v + c_{-i}\,x_{-i} = 0$$

ou

$$a_{-i} = a,\ b_{-i} = b_{-i+1} - (\log k_{-i+1})_u\,,\ c_{-i} = c_{-i+1} - (b_{-i+1})_v + (a_{-i+1})_u - a_{-i+1}\,(\log k_{-i+1})_u$$

et les invariants

$$h_{-i} = k_{-i+1}\,,\ k_{-i+1} = 2\,k_{-i+1} - h_{-i+1} - (\log k_{-i+1})_{uv}\,.$$

Comme nous n'avons pas l'intention de faire une étude systématique de l'équation de Laplace, les développements précédents sont suffisants pour l'étude des réseaux.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATIONS DES RÉSEAUX.

I. TRANSFORMATION DE LAPLACE.

66. C'est *Darboux* qui a montré le premier que la méthode de Laplace donne une transformation des réseaux, c'est-à-dire qu'elle permet de déduire d'un réseau d'autres réseaux.

Soit en effet (x) un réseau de l'espace projectif E_{n-1} et

$$(1)\quad x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0$$

l'équation de Laplace correspondante. Par définition (no. 54) les tangentes aux courbes v du réseau, aux points où ces courbes rencontrent une même courbe u

Digitized by Google

quelconque, forment une surface développable (ou conique). Ces droites xx_v restent donc, pour $v = \text{const.}$, tangentes à une même courbe qui varie avec v, ou passent par un même point variable avec v.

Les coordonnées du point x_1 de xx_v, où cette droite touche l'arête de rebroussement, ou qui reste fixe pour $v = \text{const.}$, sont données par (no. 55)

$$(2) \quad x_1 = x_v + a\,x;$$

elles vérifient donc (si $h \neq o$) la transformée de Laplace dans le sens de la variable v de l'équation (1). Le point x_1 décrit en général par conséquent (si $h \neq o$), lorsque u et v varient, un nouveau réseau (x_1), qui se réduit à une courbe[1]) si $h = o$. Nous appellerons (x_1) le transformé de Laplace de (x) dans le sens des courbes v et particulièrement nous dirons que le point x_1 est la transformé de Laplace de x dans le sens de la courbe v. Nous pouvons démontrer géométriquement que le point x_1 décrit en général, si $h \neq o$, un réseau. En effet, dans ce cas, le point x_1 décrit en général, lorsque u et v varient, une surface S_1. Remarquons tout d'abord que les droites xx_1 sont tangentes aux courbes u de S_1, car on a

$$(3) \quad (x_1)_u + b\,x_1 = h\,x,$$

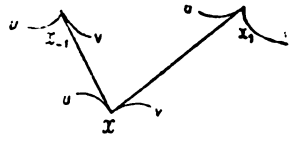
Supposons $u = \text{const.}$, c'est-à-dire fixons sur S_1 une courbe v, je dis que les droites xx_1 le long de cette courbe forment une surface développable. Or ceci est évident, parceque, pour $u = \text{const.}$, le point x décrit une courbe tangente à xx_1.

On démontre de la même manière que le point x_{-1}, défini par

$$x_{-1} = x_u + b\,x,$$

décrit, si $k \neq o$, le réseau (x_{-1}), transformé de Laplace de (x) dans le sens des courbes u.

On peut représenter la situation des réseaux (x), (x_1) et (x_{-1}) autour des points x, x_1 et x_{-1} par la figure suivante,



où sont figurées les courbes u et v de chaque réseau.

67. *Congruences d'un réseau.* Si nous considérons le réseau (x) et son transformé de Laplace (x_1), dans le sens des courbes v, la droite xx_1 dépend des deux paramètres u et v; elle engendre dans l'espace E_{n-1} une *congruence de droites.*

La congruence (xx_1) jouit de propriétés spéciales. Pour $u = u_o$ le point x décrit une courbe v du réseau (x), à laquelle xx_1 reste tangente; la droite xx_1 décrit ainsi pour $u = u_o$ une développable (u_o) qui appartient à la congruence. Le plan tan-

[1]) Nous étudierons plus loin (no. 70) tous les cas où (x_1) se réduit à une courbe.

Digitized by Google

gent à cette développable le long de la génératrice xx_1 contient la tangente en x_1 à la courbe $u = u_0$ du réseau (x_1), c'est le plan tangent en x_1 à la surface S_1 sur laquelle est tracé le réseau (x_1); il est d'ailleurs le plan osculateur en x à la courbe $u = u_0$ du réseau (x). La développable (u_0) est circonscrite à la surface S_1 le long de la courbe $u = u_0$.

Lorsque u_0 varie, on a ainsi une infinité de surfaces développables, dont les génératrices constituent la congruence (xx_1). Toutes ces développables sont circonscrites à S_1 le long des courbes v du réseau (x_1) et leurs arêtes de rebroussements sont les courbes v du réseau (x).

Pour $v = v_0$ et u variable, c'est le point x_1 qui décrit une courbe u du réseau (x_1) à laquelle xx_1 reste tangente. On a ainsi une autre famille de développables circonscrites à la surface S le long des courbes u du réseau (x), dont les arêtes de rebroussement sont les courbes u du réseau (x_1) et dont les génératrices constituent aussi la congruence (xx_1).

On démontre que la congruence (xx_{-1}) jouit des mêmes propriétés.

Les congruences (xx_1) et (xx_{-1}) formées par les tangentes du réseau (x) seront dites *les congruences de ce réseau*.

68. *Congruences.* On appelle congruence de courbes un système de courbes qui dépend de deux paramètres, ou encore un système doublement infini (∞^2) de courbes. Nous considérerons spécialement les congruences de droites et parmi celles-ci les congruences qui jouissent des mêmes propriétés que (xx_1) et (xx_{-1}).

Nous dirons donc que (xy) est une *congruence*, si la droite xy dépend de deux paramètres u et v et que pour $u = u_0$ le point x décrive, quelque soit u_0, une courbe tangente à xy, et que pour $v = v_0$ ce soit y qui décrive une pareille courbe, en d'autres termes si le système doublement infini de droites peut être décomposé de deux manières différentes en surfaces développables.

Nous allons démontrer que si (xy) est une congruence dans le sens restreint que nous venons de préciser, les points x et y décrivent en général deux réseaux (x) et (y), dont les courbes sont u et v, et que l'on appelle les *réseaux focaux* de la congruence.

En effet, notre hypothèse montre que les points x et y vérifient le système

$$x_u = \alpha x + \beta y, \quad y_u = \gamma x + \delta y.$$

Si $\beta\gamma \neq 0$ on peut éliminer y ou x entre ces deux équations. On obtient ainsi

$$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0,$$
$$y_{uv} + a' y_u + b' y_v + c' y = 0,$$

ce qui prouve bien que x et y décrivent des réseaux[1]). De plus, comme on a $\alpha = -a$,

[1]) La démonstration géométrique est tout aussi simple.

Digitized by Google

$b' = -\delta$, il résulte

$$x_1 = x_v + a\,x = x_v - a\,x = \beta\,y,$$
$$y_{-1} = y_u + b\,y = y_u - \delta\,y = \gamma\,x$$

qui font voir que les réseaux (x) et (y) sont chacun le transformé de Laplace de l'autre.

Si $\beta = o$ le point x décrit une courbe, si $\gamma = o$ c'est y qui décrit une courbe. La congruence a alors des *courbes focales*. Dans tous les cas x et y sont dits *les foyers* du rayon xy.

69. *Transformations successives de Laplace.* Si (x_1) ne se réduit pas à une courbe, on peut lui appliquer de nouveau la transformation de Laplace dans le sens des courbes v. On obtiendra ainsi un nouveau réseau (x_2), *le second transformé de Laplace du réseau* (x) *dans le sens des courbes* v.

Le transformé de Laplace de (x_1) dans le sens des courbes u est évidemment le réseau initial (x).

En appliquant encore une fois la transformation de Laplace dans le sens des courbes v à (x_2), dans le cas où ce réseau ne se réduit pas une courbe, on obtient le troisième transformé de (x), le réseau (x_3) et ainsi de suite. On a ainsi, dans le sens des courbes v, une suite de réseaux (x_1), (x_2), ..., (x_m), — les transformés successifs de (x) — qui, en général, est indéfinie.

On a, de la même manière, dans le sens des courbes u, les réseaux (x_{-1}), (x_{-2}), ..., (x_{-m}), ...

70. Nous allons étudier maintenant les cas où la transformation de Laplace cesse de s'appliquer, c'est-à-dire où le réseau (x_i), i positif ou negatif, se réduit à une courbe. Dans ce cas le transformé suivant n'existe plus.

Étudions, pour préciser, le cas où (x_1) se réduit à une courbe. Il faut et il suffit que l'on ait (no. 45)

$$(4)\quad A\frac{\delta x_1}{\delta u} + B\frac{\delta x_1}{\delta v} + C\,x_1 = o.$$

Il y a deux cas à considérer selon que $B = o$ ou $B \neq o$. Nous appellerons le premier le cas de *Laplace*, le second le cas de *Goursat*.

a) Cas de Laplace. L'équation (4), vérifiée par les coordonnées $x'^{(i)}_1$ de x_1, se réduit à

$$A\frac{\delta x_1}{\delta u} + C\,x_1 = o,$$

ou, en vertu de (3), à

$$A(-b\,x_1 + h\,x) + C\,x_1 = o.$$

Digitized by Google

Comme les points x et x_1 sont distincts, on a nécessairement $h = o$, $A\,b = C$ et l'équation de Laplace (1) du réseau (x) s'intègre par la méthode de Laplace.

Les développables circonscrites à la surface S, sur laquelle est tracé (x), le long des courbes u, sont des surfaces coniques, dont les sommets, variables avec v, décrivent la courbe (x_1).

Réciproquement, si $h = o$, l'équation (3) montre que nous nous trouvons dans le cas de Laplace.

b) Cas de Goursat. Supposons maintenant $B \neq o$. A l'aide des relations (2) et (3) l'équation (4) prend la forme

$$(5) \quad A' x_{vv} + B' x_v + C' x = o$$

où

$$A' = B \neq o,\ B' = B a - A b + C,\ C' = A(h - ab) + B a_v + C a.$$

Nous tirons de (5) la conclusion suivante (no. 60):

On a le cas de Goursat si (x) est tracé sur une développable, xx_v étant les génératrices rectilignes et (x_1) l'arête de rebroussement.

C'est M. *Goursat* qui a considéré pour la première fois ce cas analytiquement (American Journal of Mathematics, 1896), mais c'est M. *Bompiani* qui lui a donné l'interprétation géométrique (Circolo matematico di Palermo, 1912).

On peut aller un peu plus loin et approfondir la question. Le système formé par les équations (1) et (5) pouvant s'écrire

$$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = o,$$
$$x_{vv} + q x_v + r x = o,$$

on a d'abord les conditions d'intégrabilité (no. 60)

$$(6) \quad a_v - r = a(a - q),\ b_v - a b + c = q_u,\ c_v - a c = r_u + b r - c q,$$

ensuite

$$(7) \quad \frac{\delta x_1}{\delta u} = -b x_1 + h x,\ \frac{\delta x_1}{\delta v} = (a - q) x_1,$$

Par conséquent si $h = o$, le point x_1 est fixe (no. 44) et le réseau (x) est tracé sur une surface conique, les courbes v étant les génératrices rectilignes. Ce cas est mixte, il est en même temps un cas de Laplace et un cas de Goursat.

Supposons $h \neq o$, alors on peut calculer

$$x_2 = \frac{\delta x_1}{\delta v} + a_1 x_1,\ a_1 = a - \frac{h_v}{h},$$

et comme (x_2) n'existe pas, on a nécessairement

$$(8) \quad x_2 \equiv o.$$

On peut vérifier directement ce résultat. Il suffit de voir que la deuxième

Digitized by Google

équation (7), qui est une autre forme de (4), est précisément (8). On tire en effet des relations (6)

$$a - q = \frac{h_v}{h} - a = -a_1.$$

On peut donc dire que la relation (8) caractérise le cas de Goursat.

Remarquons encore que de (8) on tire

$$\frac{\delta x_2}{\delta u} = -bx_2 + h_1 x_1 = h_1 x_1 \equiv 0,$$

donc $h_1 = o$.

D'ailleurs nous étudierons la succession de réseaux ..... (x_{-2}), (x_{-1}), (x), (x_1), ..., (x_m), ... dans un chapître spécial.

II. RÉSEAUX ET CONGRUENCES CONJUGUÉS ET HARMONIQUES

71. *Congruences singulières conjuguées à un réseau. Réseaux conjugués à une congruence singulière.* Nous ferons connaître plusieurs méthodes qui permettent de déduire d'un réseau donné d'autres réseaux et qui établissent des relations remarquables entre les réseaux et les congruences.

Soit (x) le réseau donné de E_{n-1},

$$(9) \quad L(x) \equiv x_{uv} + ax_u + b x_v + c x = 0$$

l'équation de Laplace correspondante. Si ω ($\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, ..., $\omega^{(n)}$) est un point fixe de E_{n-1}, nous dirons que la droite ωx décrit une *congruence singulière* (ωx), *conjuguée* au réseau (x).

Réciproquement nous dirons que (x) est un *réseau conjugué à la congruence singulière* (ωx).

La congruence singulière (ωx) est déterminée par le point fixe ω et par un des réseaux conjugués à la congruence. Nous considérons comme développables de la congruence (ωx), les surfaces réglées (coniques) qui correspondent aux courbes u et v du réseau.

Cherchons maintenant les autres réseaux conjugués à (ωx). Il faudra choisir la fonction λ de manière que

$$y^{(i)} = x^{(i)} + \lambda \omega^{(i)}, \; i = 1, 2 \ldots, n$$

ou, en supprimant les indices

$$y = x + \lambda\omega$$

vérifient une équation de Laplace. Or, on a

$$L(y) = \omega L(\lambda),$$

donc, *si λ est une solution de* (9) *le point y décrit un réseau conjugué à* (ωx).

Digitized by Google

Nous pouvons tirer de là un résultat intéressant. Prenons l'intersection y de ωx par le L_{n-2} fixe

$$\Sigma a X = o,$$

λ sera déterminé par

$$\Sigma a x + \lambda \Sigma a \omega = o$$

et comme cette valeur est visiblement une solution de (9), on a le résultat suivant:

La projection d'un réseau sur un L_{n-2} est aussi un réseau.

Nous voulons démontrer maintenant que l'on a trouvé ainsi tous les réseaux (y) conjugués à (ωx).

Supposons que λ ne soit pas une solution de (9), donc y ne vérifie pas cette équation, mais une autre différente

$$L'(y) = o,$$

ce qui donne

$$L'(x^{(i)}) + \omega^{(i)} L'(\lambda) = o, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et dont on tire

$$L'(\omega^{(n)} x^{(i)} - \omega^{(i)} x^{(n)}) = o, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

ou encore

$$L'(\xi^{(i)}) = o, \quad i = 1, 2, \ldots n-1,$$

le point ξ $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n-1)}, o)$ étant la projection de x et de y, à partir de ω, sur $X_n = o$. Comme on a aussi

$$L(\xi^{(i)}) = o, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

il résulterait que le point ξ vérifierait une équation de la forme

$$A \xi_u + B \xi_v + C \xi = o$$

et le réseau (ξ) se réduirait à une courbe, ce qui est impossible, en général.

72. *Congruences et réseaux harmoniques. Réseaux singuliers.*

A une solution R de (9) il correspond une infinité de réseaux, conjugués à la congruence singulière (ωx), décrits par les points

$$y = mx + R\omega,$$

m étant une constante arbitraire. Il est facile de voir que les tangentes aux courbes u et les tangentes aux courbes v de ces réseaux rencontrent les tangentes xx_u et xx_v de (x) respectivement aux mêmes points

$$(10) \quad x' = R x_u - R_u x, \quad x'' = R x_v - R_v x.$$

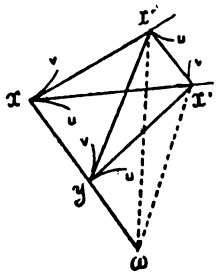
Comme on a

$$R x'_v = (R_v - a R) x' - (R_u + b R) x'',$$
$$R x''_u = (R_u - b R) x'' - (R_v + a R) x',$$

la droite $x'x''$ engendre (no. 68) une congruence $(x'x'')$ dont les réseaux focaux sont décrits par x' et x''; la droite $x'x''$ est tangente en x' à la courbe v du réseau (x') et en x'' à la courbe u du réseau (x'').

Digitized by Google

Nous dirons que la congruence $(x'x'')$ est *harmonique* aux réseaux (y) et réciproquement que les réseaux (y) sont *harmoniques* à la congruence $(x'x'')$ et nous représenterons cette situation par la figure suivante:



Parmi les réseaux (y) on a d'abord le réseau (x) pour $R = o$, on a aussi, pour $m = o$, un *réseau singulier*, qui se réduit au point ω. Nous désignerons ce réseau singulier, harmonique à la congruence $(x'x'')$, par $(x'\omega x'')$ et nous considérons les droites $\omega x'$ et $\omega x''$ comme ses tangentes. Les congruences singulières $(\omega x')$ et $(\omega x'')$ sont donc les congruences de ce réseau singulier (no. 67).

Considérons en général la congruence (xy) dont les réseaux focaux satisfont (no. 68) à

$$(11) \quad x_v = \alpha\, x + \beta\, y, \;\; y_u = \gamma\, x + \delta\, y$$

et cherchons toutes les congruences $(x'y')$ harmoniques au réseau singulier $(x\omega y)$. Comme

$$(12) \quad x' = x + \lambda\omega, \;\; y' = y + \mu\omega,$$

il faudra déterminer λ et μ de manière que l'on ait

$$x'_v = \alpha'\, x' + \beta'\, y', \;\; y'_u = \gamma'\, x' + \delta'\, y'$$

ou

$$\alpha\, x + \beta\, y + \lambda_v\, \omega = \alpha'\,(x + \lambda\,\omega) + \beta'\,(y + \mu\,\omega),$$
$$\gamma\, x + \delta\, y + \mu_u\, \omega = \gamma'\,(x + \lambda\,\omega) + \delta'\,(y + \mu\,\omega).$$

Or, les points x, y et ω n'étant pas en ligne droite, on a nécessairement $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ et $\delta' = \delta$, donc

$$\lambda_v = \alpha\,\lambda + \beta\,\mu, \;\; \mu_u = \gamma\,\lambda + \delta\,\mu,$$

c'est-à-dire *il est nécessaire et suffisant que λ et μ constituent une solution du système* (11).

On a une application intéressante de ce résultat. Coupons ωx et ωy par le L_{n-2} fixe

$$\Sigma m X = 0,$$

λ et μ de (12) seront déterminés par

$$\Sigma\, m\, x + \lambda\, \Sigma\, m\, \omega = o, \;\; \Sigma\, m\, y + \mu\, \Sigma\, m\, \omega = 0$$

et comme ces valeurs satisfont évidemment à (11), on a la proposition suivante:

Digitized by Google

La projection d'une congruence de E_{n-1} *sur un* L_{n-2} *est aussi une congruence* (dans le sens restreint donné au no. 68).

Nous montrerons plus loin comment on trouve toute congruence harmonique à un réseau donné et tout réseau harmonique à une congruence donnée.

73. *Réseaux conjugués à une congruence.* Soit (xy) la congruence dont les réseaux focaux satisfont à (11). Le rayon $x'y'$, défini par (12), de la congruence $(x'y')$, harmonique au réseau singulier $(x\omega y)$, coupe xy au point

$$(13) \quad z = \begin{vmatrix} x & y \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}$$

qui décrit un réseau (z). On a en effet

$$z_u = \delta z + \begin{vmatrix} x_u & y \\ \lambda_u & \mu \end{vmatrix}, \quad z_v = a z + \begin{vmatrix} x & y_v \\ \lambda & \mu_v \end{vmatrix},$$

en tenant compte que λ et μ satisfont aussi à (11). Donc

$$z_{uv} = (\delta z)_v + (a_u + \beta\gamma) z + a (z_u - \delta z) + \begin{vmatrix} x_u & y_v \\ \lambda_u & \mu_v \end{vmatrix}$$

et comme

$$\mu_v x_u - \lambda_u y_v = \frac{\mu_v}{\mu} (\mu x_u - \lambda_u y) + \frac{\lambda_u}{\lambda} (\mu_v x - \lambda y_v) - \frac{\lambda_u \mu_v}{\lambda \mu} (\mu x - \lambda y)$$
$$= \frac{\mu_v}{\mu} (z_u - \delta z) + \frac{\lambda_u}{\lambda} (z_v - a z) - \frac{\lambda_u \mu_v}{\lambda \mu} z,$$

on a finalement

$$(14) \quad z_{uv} = \left(a + \frac{\mu_v}{\mu}\right) z_u + \left(\delta + \frac{\lambda_u}{\lambda}\right) z_v$$
$$+ \left(\beta\gamma - a\delta + a_u \delta_v - a\frac{\lambda_u}{\lambda} - \delta \frac{\mu_v}{\mu} - \frac{\lambda_u \mu_v}{\mu \mu}\right) z$$

ce qui prouve que le point z décrit un réseau. Nous dirons que ce réseau est *conjugué* à la congruence (xy); il l'est aussi à la congruence $(x'y')$. Nous voyons ainsi que le point z défini par (13), où λ et μ satisfont à (11), décrit un réseau (z) conjugué à (xy).

Nous allons démontrer qu'on obtient de cette manière tout réseau conjugué à (xy). Posons en effet

$$z = \begin{vmatrix} x & y \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}$$

et supposons que ce point décrit un réseau (z). Il s'agit de prouver qu'on peut choisir le facteur avec lequel on peut multiplier les coordonnées de z, de manière que λ' et μ' vérifient (11).

Digitized by Google

Tout d'abord, on peut choisir ce facteur de manière que l'on ait

$$\lambda'_v = \alpha\lambda' + \beta\mu',$$

alors on peut déterminer une fonction ε par la relation

$$\mu'_u = \gamma\lambda' + \delta\mu' + \varepsilon\mu'.$$

Un calcul pareil à celui du no. 73 montre que l'on a

$$z_{uv} = \left(\alpha + \frac{\mu'_v}{\mu'}\right) z_u + \left(\delta + \frac{\lambda_u}{\lambda'}\right) z_v + (\ )\, z + \varepsilon_v \cdot \mu' \cdot x,$$

donc z décrit un réseau dans le cas et seulement dans le cas où $\varepsilon_v = o$, ou $\varepsilon = f(u)$. [1] En posant

$$\lambda' = \lambda e^{\int f(u)\,du}, \quad \mu' = \mu e^{\int f(u)\,du},$$

λ et μ satisfont à (11) et, en supprimant un facteur commun, on pourra prendre

$$z = \begin{vmatrix} x & y \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}$$

ce qui démontre la réciproque que nous avions en vue.

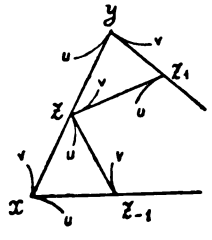
74. Il y a une relation géométrique intéressante entre un réseau (z) conjugué à la congruence (xy) et les réseaux focaux (x) et (y) de cette congruence, à savoir *les congruences* (zz_{-1}) *et* (zz_1) *du réseau* (z) *sont harmoniques aux réseaux* (x) *et* (y) *respectivement.* On a, en effet, successivement

$$z_u = \delta z + \begin{vmatrix} x_u & y \\ \lambda_u & \mu \end{vmatrix} = \delta z + \mu x_u + \frac{\lambda_u}{\lambda}(\mu x - \lambda y) - \frac{\lambda_u \mu}{\lambda} x = \left(\delta + \frac{\lambda_u}{\lambda}\right) z + \frac{\mu}{\lambda}(\lambda x_u - \lambda_u x),$$

donc le point

$$z_{-1} = z_u - \left(\delta + \frac{\lambda_u}{\lambda}\right) z = \frac{\mu}{\lambda}(\lambda x_u - \lambda_u x)$$

est situé sur la tangente xx_u du réseau (x), la congruence (zz_{-1}) est bien harmonique à ce réseau. On démontre de la même manière que (zz_1) est harmonique à (y). On a donc la situation représentée par la figure suivante.



[1] A moins que x soit dans le plan tangent de (z), ce qui est impossible, sauf pour les réseaux plans.

Digitized by Google

75. La figure précédente fait voir que deux réseaux (z) et (z'), conjugués à (xy), sont *concourants*, c'est-à-dire les tangents zz_u et $z'z'_u$ se coupent en un point t' et les tangentes zz_v et $z'z'_v$ en un point t''. Je dis que $t't''$ *décrit une congruence harmonique aux réseaux* (z) *et* (z').

A cet effet nous définissons (z) par (13), λ et μ vérifiant, comme x et y, (11), et (z') par

$$z' = \begin{vmatrix} x & y \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}$$

λ' et μ' vérifiant aussi le système (11). Pour que les réseaux (z) et (z') soient différents, on doit avoir

$$\Delta = \mu\lambda' - \lambda\mu' \neq 0.$$

Cela étant, on a d'abord

$$\lambda' z - \lambda z' = \Delta \cdot x, \quad \mu' z - \mu z' = \Delta \cdot y$$

ensuite

$$\mu'(z_u - \delta z) - \mu(z'_u - \delta z') = (\mu\lambda'_u - \mu'\lambda_u)\, y,$$

d'où par un calcul facile

$$\mu'\left(z_u - \frac{\Delta_u}{\Delta} z\right) = \mu\left(z'_u - \frac{\Delta_u}{\Delta} z'\right),$$

ou encore, en posant

$$\zeta = \frac{z}{\Delta}, \ \zeta' = \frac{z'}{\Delta}, \ m = \frac{\mu}{\mu'},$$

$$\zeta_u = m\,\zeta'_u.$$

On obtiendra de la même manière en posant $n = \frac{\lambda'}{\lambda}$,

$$\zeta_v = n\,\zeta'_v.$$

Il résulte de là que l'équation de Laplace qui correspond au réseau $(\zeta') \equiv (z')$ est

$$(m\,\zeta'_u)_v = (n\,\zeta'_v)_u$$

ou

$$(m-n)\,\zeta'_{uv} + m_v\,\zeta'_u + n_u\,\zeta'_v = o, \ m - n = -\frac{\Delta}{\lambda'\mu'} \neq 0$$

et celle de $(\zeta) \equiv (z)$ est

$$\left(\frac{1}{m}\zeta_u\right)_v = \left(\frac{1}{n}\zeta_v\right)_u.$$

On peut prendre

$$t' = \zeta'_u, \ t'' = \zeta'_v$$

donc

$$(m-n)\,t'_v = (m-n)\,t''_u = -m_v\,t' + n_u\,t''$$

qui montre bien que $t't''$ décrit une congruence harmonique à (z) et à (z').

Digitized by Google

On a donc le théorème suivant: *Deux réseaux conjugués à une même congruence sont harmoniques à une autre congruence.*

76. Considérons maintenant un réseau quelconque (x) dont l'équation de Laplace est (9) et soit $(x'x'')$ un congruence harmonique à ce réseau. Alors le réseau focal (x') est conjugué à (xx_{-1}) et (x'') à la congruence (xx_1). Il suffit de déterminer (x'). Or, le système analogue à (11), pour la congruence (xx_{-1}), est

$$(x_{-1})_v = -a\,x_{-1} + k\,x\,,\quad x_u = -bx + x_{-1}\,,$$

dont la première est au fond l'équation de Laplace (9) et la seconde définit la transformation de Laplace de x à x_{-1}. En appliquant les résultats du no. 73 on obtient la proposition suivante:

Le réseau (x'), le plus général, conjugué à la congruence (xx_{-1}) est déterminé par

$$x' = \begin{vmatrix} x_{-1} & x \\ \mathrm{R}_{-1} & \mathrm{R} \end{vmatrix} = \mathrm{R}\,x_u - \mathrm{R}_u\,x\,,$$

R *étant une solution arbitraire de* (9).

Comme l'autre réseau focal de la congruence $(x'x'_v)$ est, d'après no. 72, le réseau (x''), où

$$x'' = \mathrm{R}\,x_v - \mathrm{R}_v\,x,$$

il résulte que $(x'x'')$ *est la congruence la plus générale harmonique à* (x).

77. Remarquons d'abord, avant d'aller plus loin, que les relations

$$(15)\quad x' = \mathrm{R}\,x_u - \mathrm{R}_u\,x\,,\quad x'' = \mathrm{R}\,x_v - \mathrm{R}_v\,x$$

permettent de passer, non seulement du réseau (x) aux réseaux (x') et (x'') respectivement, mais aussi de toute solution x de (9) à la solution correspondante x' de l'équation de Laplace du réseau (x') et à la solution x'' de l'équation du réseau (x'').

Cela étant, nous voulons démontrer que *deux congruences* $(x'x'')$ *et* $(y'y'')$, *harmoniques à un même réseau* (x), *sont conjuguées à un même réseau* (z). Soient (15) les équations qui définissent la congruence $(x'x'')$ à l'aide de la solution R de (9) et

$$y' = \mathrm{R}'x_u - \mathrm{R}'_u\,x\,,\quad y'' = \mathrm{R}'\,x_v - \mathrm{R}'_v\,x\,,$$

celles qui définissent $(y'y'')$ à l'aide de la solution R'.

Les coordonnées du point z, commun à $x'x''$ et à $y'y''$ sont de la forme

$$z = \alpha'x' + \alpha''x'' = \beta'y' + \beta''y''$$

$$= \alpha'(\mathrm{R}\,x_u - \mathrm{R}_u\,x) + \alpha''(\mathrm{R}\,x_v - \mathrm{R}_v\,x) = \beta'(\mathrm{R}'\,x_u - \mathrm{R}'_u\,x) + \beta''(\mathrm{R}'\,x_v - \mathrm{R}'_v\,x)$$

$$= \mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,x_u + \mathrm{C}\,x_v.$$

Il est utile de considérer cette expression non seulement comme déterminant les coordonnées $z^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du point z à l'aide des coordonnées $x^{(i)}$

Digitized by Google

($i = 1, 2, \ldots, n$) de x, mais comme définissant une fonction z correspondant à la solution arbitraire x de (9). Alors, si $x = \mathrm{R}$ on a $z = o$, et on a aussi $z = o$ pour $x = \mathrm{R}'$, ce qui détermine z à un facteur prés, qui n'est pas essentiel pour notre question, à savoir

$$(16) \quad z = \begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ \mathrm{R} & \mathrm{R}_u & \mathrm{R}_v \\ \mathrm{R}' & \mathrm{R}'_u & \mathrm{R}'_v \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons démontrer aisément que ce point z décrit un réseau, qui sera conjugué à $(x'x'')$ et à $(y'y'')$. A cet effet nous remarquerons que z étant situé sur la tangente $x'x'_v \equiv x'x''$ du réseau (x'), on a

$$z = \varrho\, x'_v + \sigma\, x'.$$

Comme on peut multiplier z par un même facteur, ϱ peut être choisi arbitrairement, on peut donc prendre

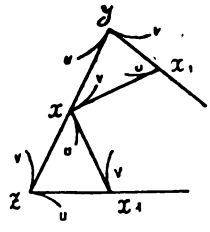
$$\varrho = \mathrm{R}\mathrm{R}'_u - \mathrm{R}'\mathrm{R}_u,$$

c'est-à-dire ϱ est la valeur que prend x' pour $x = \mathrm{R}'$. Comme z s'annule pour $x = \mathrm{R}'$, on a $\sigma = -\varrho_v$, donc

$$z = \varrho\, x'_v - \varrho_v\, x',$$

qui prouve que (z) décrit un réseau conjugué[1]) à $(x'x'_1) \equiv (x'x'')$, car ϱ est une solution de l'équation de Laplace de (x').

78. *Congruences conjuguées à un réseau.* Soit (x) le réseau donné dont l'équation de Laplace est (9). Si (yz) est une congruence conjuguée, on a la figure suivante (no. 74)



Le réseau focal (y) est harmonique à (xx_1). Nous allons le déterminer et (z) sera ensuite obtenu sans quadratures. La figure montre qu'on peut écrire

$$y_u = \alpha\, x + \beta\, y, \quad y_v = \gamma\, x_1 + \delta\, y,$$

dont on tire

$$(\alpha\, x + \beta\, y)_v = (\gamma\, x_1 + \delta\, y)_u$$

---

[1]) Il est intéressant de remarquer que (z) est conjugué à ∞^1 congruences $(t't'')$ harmoniques à (x). Il suffit de remarquer que le point z ne change pas, si à la place de R' on prend $\bar{\mathrm{R}} = \mathrm{R} + m\mathrm{R}'$, où m = const.

Digitized by Google

ou encore

$$a_v\, x + a\,(x_1 - a\, x) + \beta_v\, y + \beta\,(\gamma\, x_1 + \delta\, y)$$
$$= \gamma_u\, x_1 + \gamma\,(-b\, x_1 + h\, x) + \delta_u\, y + \delta\,(a\, x + \beta\, y).$$

Comme les points x, x_1 et y ne sont pas en ligne droite, cette équation est identique. On a en particulier

$$\beta_v = \delta_u\,,$$

d'où l'on déduit aisément qu'en remplaçant y par λy, on peut réduire le système vérifié par y à la forme

$$y_u = \mathrm{R}'\, x,\ y_v = \mathrm{R}\, x_1.$$

La relation identique

$$(\mathrm{R}'\, x)_v = (\mathrm{R}\, x_1)_u$$

donne alors

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R}_u - b\,\mathrm{R},\ \mathrm{R}'_v - a\,\mathrm{R}' = h\,\mathrm{R},$$

R est donc une solution de l'équation

$$(17)\quad \mathrm{R}_{uv} - (a\mathrm{R})_u - (b\mathrm{R})_v + c\mathrm{R} = 0\,,$$

adjointe à l'équation (9), et (y) est déterminé par quadratures à l'aide du système

$$(18)\quad y_u = (\mathrm{R}_u - b\,\mathrm{R})\, x,\ y_v = \mathrm{R}\,(x_v + a\, x).$$

Il est aisé de voir que l'autre foyer z de yx est donné par

$$(19)\quad z = y - \mathrm{R}x.$$

A chaque solution R de (17) correspond une infinité de congruences conjuguées à (x). Si (yz) est une d'entre elles, toute autre $(\bar{y}\ \bar{z})$ est déterminée par

$$\bar{y} = y + \omega\,,\ \bar{z} = z + \omega\,,$$

ω étant un point fixe arbitraire de E_{n-1}. Toutes ces congruences sont deux à deux harmoniques à un réseau singulier $(y\omega z)$.

79. Nous pouvons démontrer maintenant, en général, que *deux congruences* (yz) et $(y'z')$ *conjuguées au réseau* (x) *sont harmoniques à un même réseau* (t).

Supposons d'abord que (yz) soit définie par (18) et (19) à l'aide de la solution R de (17) et que $(y'z')$ le soit par

$$y'_u = (\mathrm{R}'_u - b\,\mathrm{R}')\, x,\ y'_v = \mathrm{R}'\,(x_v + a\, x),\ z' = y' - \mathrm{R}'\, x,$$

à l'aide de la solution R'. On a

$$\mathrm{R}'y - \mathrm{R}y' = \mathrm{R}'z - \mathrm{R}z'.$$

donc le point

$$t = \mathrm{R}'y - \mathrm{R}y'$$

Digitized by Google

est commun aux droites yy' et zz'. Comme on a

$$t_u = R'_u z - R_u z', \quad t_v = R'_v y - R_v y',$$

il résulte que z et z' se trouvent sur la tangente tt_u et y et y' sur la tangente tt_v. Il suffit par conséquent de montrer que t décrit un réseau. Or si l'on écrit qu'on a

$$t_{uv} + A t_u + B t_v + C t = 0,$$

on obtient une relation de la forme

$$A'y + B'y' + C'x = 0$$

qui doit être identique, ce qui donne trois relations qui déterminent A, B, C.

80. Bien que, au fond, nous ayons traité au no. 78 le problème dela recherche d'un réseau harmonique à une congruence donnée, nous le reprendrons ici sous une forme qui n'est pas dépourvue d'intérêt.

Soit (xy) une congruence dont les réseaux focaux satisfont au système (11). Il s'agit de trouver un réseau (z) tel que l'on ait

$$(20) \quad z_u = \alpha' z + \xi x, \quad z_v = \beta' z + \eta y,$$

qui expriment que x est sur la tangente zz_u, y sur zz_v; α', β', ξ et η étant des fonctions inconnues qu'il faut déterminer de manière qu'on ait

$$(\alpha' z + \xi x)_v = (\beta' z + \eta y)_u .$$

Si on développe cette relation, en remplaçant z_u, z_v, x_v, y_u par leurs valeurs, on trouve une égalité de la forme

$$Ax + By + Cz = 0$$

qui doit être une identité. $C = o$ donne alors

$$\alpha'_v = \beta'_u,$$

on a donc

$$\alpha' = \frac{\theta_u}{\theta}, \quad \beta' = \frac{\theta_v}{\theta},$$

et en remplaçant z par θz, ce qui ne change pas le point z, le système (20) devient

$$(21) \quad z_u = \xi x, \quad z_v = \eta y.$$

Les conditions d'intégrabilité de ce système sont

$$(22) \quad \xi_v = -\alpha \xi + \gamma \eta, \quad \eta_u = \beta \xi - \delta \eta.$$

Digitized by Google

On a donc le résultat suivant: *Tout réseau*[1]) *harmonique* (z) *à la congruence* (xy) *est déterminé par le système* (21), ξ *et* η *étant des solutions du système* (22). Ce dernier système s'appelle *adjoint* du système (9); réciproquement, on voit que celuici est adjoint de (22).

A toute solution ξ, η de (22) correspond une infinité de réseaux (z) harmoniques à (xy). Si (z) est un d'entre eux, tout autre $(\bar{z})$ s'obtient en prenant

$$\bar{z} = z + \omega,$$

ω étant un point fixe arbitraire. On voit de là que (z) et $(\bar{z})$ sont tous les deux conjugués à la même congruence singulière (ωz), ou, ce qui est la même chose, que la droite $z\bar{z}$ décrit une congruence singulière, conjuguée à (z) et à (z').

Ce résultat peut être généralisé. Considérons en effet deux réseaux (z) et (z'), harmoniques à la congruence (xy) et déduits à l'aide des solutions ξ, η et ξ', η' de (22). On a

$$z_u = \xi\, x,\ z_v = \eta\, y$$

et

$$z'_u = \xi'\, x,\ z'_v = \eta'\, y,$$

donc

$$(23)\quad z'_u = m\, z_u,\ z'_v = n\, z_v,\ m = \frac{\xi'}{\xi},\ n = \frac{\eta'}{\eta}.$$

Remarquons maintenant qu'on a

$$(z' - m\, z)_u = - m_u\, z,\ (z' - n\, z)_v = - n_v\, z,$$

qui prouvent que les points $z' - mz$ et $z' - nz$ décrivent les réseaux focaux de la congruence (zz'), à laquelle (z) et (z') sont par conséquent conjugués. On peut donc énoncer la proposition: *Deux réseaux harmoniques à une congruence sont conjugués à une autre congruence.*

81. Nous finirons ce chapître par une remarque relative au système (23). Deux points z et z' de E_{n-1}, qui vérifient un pareil système, décrivent, par cela même, deux réseaux, harmoniques à une congruence et conjugués à une autre. Les réseaux focaux de la première congruence sont $(z_u) \equiv (z'_u)$ et $(z_v) \equiv (z'_v)$, ceux de la seconde $(z' - m\, z)$ et $(z' - nz)$. Dans le cas où $m + n = o$, les points $z' - mz$, $z' + mz$ sont conjugués harmoniques par rapport à z et z'. D'autre part les réseaux (z) et (z') sont, dans ce cas, les équations de Laplace à invariants égaux. Nous préciserons cette remarque dans le chapître suivant.

---

[1]) Que z décrit un réseau, on le voit aisément en remarquant qu'on a

$$z_{uv} = (\xi x)_v = \gamma \frac{\eta}{\xi} z_u + \beta \frac{\xi}{\eta} z_v.$$

Digitized by Google

CHAPITRE III.

RÉSEAUX À INVARIANTS ÉGAUX.

I. THÉORÈME DE KOENIGS

82. Si l'équation de Laplace qui correspond au réseau (x) de E_{n-1} a ses invariants h et k égaux, on dit que c'est un *réseau à invariants égaux*. Ces réseaux particuliers jouissent de propriétés remarquables, que nous nous proposons d'étudier.

Remarquons tout d'abord que si on applique à l'équation de Laplace à invariants égaux $h = k$

$$(1) \quad L(x) = x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0,$$

qui correspond au réseau (x), la transformation la plus générale qui ne change pas les courbes du réseau (no. 63 et 64), les invariants restent égaux. L'égalité des invariants correspond par conséquent, à une propriété géométrique particulière de ces réseaux. C'est cette propriété, due à M. *Koenigs*, que nous voulons étudier, mais auparavant nous réduirons l'équation de Laplace, dans le cas $h = k$, à une forme simple. Nous savons en effet (no. 63) que dans ce cas l'équation peut être réduite par une transformation $x = \lambda x'$ à la forme

$$x_{uv} = h\,x.$$

C'est sous cette forme que nous prendrons d'habitude l'équation de Laplace qui correspond à un réseau à invariants égaux.

83. M. *Koenigs* a obtenu son théorème, pour un réseau à invariants égaux d'un plan, par une voie géométrique ayant le caractère projectif. M. *Darboux* (Théorie des surfaces, IV, p. 37) lui a donné, pour un E_3, une démonstration métrique intéressante. La démonstration projective suivante a été annoncée par nous d'abord (C. R., 30 nov. 1908) et retrouvée un peu plus tard par M. *Bompiani* (Acc. dei Lincei, 1915, p. 190).

Soit (x) un réseau, que nous supposerons d'abord à invariants inégaux $h \neq k$, (1) étant l'équation de Laplace correspondante. Si (x_1) et (x_{-1}) sont les premiers transformés de Laplace de (x) dans un sens et dans l'autre, un point arbitraire du plan tangent $x_{-1}\,x\,x_1$ à (x) a pour coordonnées projectives dans l'espace ambiant E_{n-1}

$$\xi^{(i)} = \alpha\,x^{(i)} + \beta x_1{}^{(i)} + \gamma\,x_{-1}{}^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

ou, plus simplement

$$\xi = \alpha\,x + \beta\,x_1 + \gamma\,x_{-1}$$

Digitized by Google

α, β, γ étant les coordonnées projectives de ξ dans le plan tangent par rapport au triangle fondamental $x\,x_1\,x_{-1}$.

Une conique tangente en x_1 à $x\,x_1$ et en x_{-1} à $x\,x_{-1}$ a pour équation

$$\alpha^2 - \lambda\beta\gamma = 0;$$

elle est tangente en x_1 à la courbe u du réseau (x_1) et en (x_{-1}) à la courbe v de (x_{-1}). On peut évidemment déterminer λ de manière que la conique ait un contact du second ordre avec l'une ou l'autre de ces courbes.[1])

On obtient ainsi deux coniques C_1 et C_{-1}, attachées au réseau (x), et le théorème de Koenigs consiste en ceci, que ces deux coniques, en général différentes, sont confondues seulement dans le cas où le réseau (x) est à invariants égaux.

Considérons, tout d'abord, sur la courbe $v = \text{const.}$ de (x_1), le point $\bar{x}_1$ voisin de x_1

$$x_1 = x_1(u+\varepsilon, v) = x_1 + \varepsilon\frac{\delta x_1}{\delta u} + \frac{\varepsilon^2}{1.\,2}\frac{\delta^2 x_1}{\delta u^2} + \ldots\ldots$$

Or, on a

$$\frac{\delta x_1}{\delta u} = -b\,x_1 + h\,x,\quad \frac{\delta^2 x_1}{\delta u^2} = (h_u - 2\,b\,h)\,x + (b^2 - b_u)\,x_1 + h\,x_{-1},\ldots,$$

donc

$$(2)\quad \bar{x}_1 = x_1 + \varepsilon(-b\,x_1 + h\,x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[(h_u - 2\,b\,h)\,x + (b^2 - b_u)\,x_1 + h\,x_{-1}\right] + \ldots.$$

et de la même manière, pour le point $\bar{x}_{-1}$ voisin de x_{-1} sur la courbe $u = \text{const.}$ du réseau (x_{-1})

$$(3)\quad \bar{x}_{-1} = x_{-1} + \varepsilon(-a\,x_{-1} + k\,x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[(k_v - 2\,a\,k)\,x + k\,x_1 + (a^2 - a_v)\,x_{-1}\right] + \ldots.$$

Les expressions (2) et (3) montrent que si on fait abstraction des puissances supérieures à 2 de ε, les points $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_{-1}$ sont situés dans le plan tangent de (x). Calculons-en alors les coordonnées α, β, γ. On a

$$\text{pour } \bar{x}_1:\quad \alpha = h\varepsilon + \frac{1}{2}(h_u - 2\,b\,h)\,\varepsilon^2,\ \beta = 1 - b\,\varepsilon + \frac{1}{2}(b^2 - b_u)\,\varepsilon^2,\ \gamma = \frac{1}{2}h\,\varepsilon^2;$$

$$\text{pour } \bar{x}_{-1}:\quad \alpha = k\,\varepsilon + \frac{1}{2}(k_v - 2\,a\,k)\,\varepsilon^2,\ \beta = \frac{1}{2}k\,\varepsilon^2,\ \gamma = 1 - a\,\varepsilon + \frac{1}{2}(a^2 - a_v)\,\varepsilon^2.$$

Introduisons ces valeurs dans $\alpha^2 - \lambda\beta\gamma$, on obtient

$$\text{pour } \bar{x}_1:\quad \alpha^2 - \lambda\beta\gamma = \frac{1}{2}h(2h - \lambda)\,\varepsilon^2 + \ldots.;$$

[1]) Car le plan $x_{-1}\,x\,x_1$ est osculateur à ces courbes.

Digitized by Google

$$\text{pour } x_{-1}: \quad \alpha^2 - \lambda\beta\gamma = \frac{1}{2}k(2k-\lambda)\varepsilon^2 + \ldots\ldots$$

On aura donc la conique C_1, ayant un contact du second ordre avec la courbe $v = \text{const.}$ de (x_1), en prenant $\lambda = 2h$

$$(C_1) \quad \alpha^2 - 2h\beta\gamma = 0$$

et la conique C_{-1}, ayant un contact du second ordre avec la courbe $u = \text{const.}$ de (x_{-1}), en prenant $\lambda = 2k$

$$(C_1) \quad \alpha^2 - 2k\beta\gamma = 0.$$

Nous avons ainsi les deux coniques attachées au réseau (x). Il est manifeste qu'elles ne sont confondues que dans le cas où l'on a $h = k$. Nous avons supposé implicitement $hk \neq o$. Nous avons démontré complètement le théorème suivant:

THÉORÈME DE KOENIGS. *Si le réseau (x) est à invariants égaux, $h = k \neq o$, et seulement dans ce cas, il existe une conique ayant en x_1 un contact du second ordre avec la courbe $v = \text{const.}$ du réseau (x_1) et en x_{-1} un contact du second ordre avec la courbe $u = \text{const.}$ de (x_{-1}).*

II. TRANSFORMATION DE KOENIGS-MOUTARD.

84. La transformation de Laplace et les autres transformations des réseaux qui résultent de la considérations des congruences et réseaux conjugués et harmoniques ne transforment pas, en général, un réseau à invariants égaux en un autre réseau de même espéce. C'est M. *Koenigs* qui a donné pour la première fois une pareille transformation dans un E_3; elle est, au fond, l'interprétation géométrique d'une transformation analytique, due à *Moutard*, des équations de Laplace à invariants égaux en équations de même espèce. Voici en quoi consiste cette *transformation de Moutard*, qui est étudiée, avec tous les développements qu'elle comporte, dans le livre si souvent cité de M. *Darboux* (Tome II, p. 145 et suiv.).

Si l'équation de Laplace à invariants égaux est

$$(4) \quad x_{uv} = hx,$$

on peut l'écrire sous la forme

$$(5) \quad M(x) = h,$$

où le symbole du premier membre est défini par

$$M(x) = \frac{x_{uv}}{x}.$$

Soit R une solution de (4), alors on a

$$(Rx_v - R_v x)_u + (Rx_u - R_u x)_v = 0,$$

Digitized by Google

il existe donc une fonction y, déterminée à une constante additive près, par

$$y_u = \mathrm{R}\,x_u - \mathrm{R}_u\,x,\quad y_v = -(\mathrm{R}\,x_v - \mathrm{R}_v x),$$

ou par

$$y_u = \mathrm{R}^2\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)_u,\quad y_v = -\mathrm{R}^2\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)_v,$$

d'où il résulte que y est une solution de l'équation de Laplace

$$\left(\frac{y_u}{\mathrm{R}^2}\right)_v + \left(\frac{y_v}{\mathrm{R}^2}\right)_u = 0$$

ou

$$\mathrm{R}\,y_{uv} - \mathrm{R}_v\,y_u - \mathrm{R}_u\,y_v = 0$$

qui a ses invariants égaux. En posant

$$y = \mathrm{R}\,y'.$$

on réduit cette équation à la forme simple

$$(6)\qquad y'_{uv} = h'\,y'$$

ou

$$\mathrm{M}(y') = h'.$$

A toute solution x de (4) correspond une infinité de solutions de (6), en particulier à la solution $x = \mathrm{R}$ correspond la solution $\frac{\text{const.}}{\mathrm{R}}$, on a donc

$$h' = \mathrm{M}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante (Darboux, l. c., p. 147): *Si l'on connaît une solution particulière* R *de l'équation*

$$\mathrm{M}(x) = h$$

et que l'on forme l'équation nouvelle

$$\mathrm{M}(y') = \mathrm{M}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right),$$

toute solution de l'une des deux équations permettra de déterminer, par une simple quadrature, une solution de l'autre. Si donc on connaît l'intégrale générale de l'une des deux équations, on pourra déterminer l'intégrale générale de l'autre équation.

La relation entre les deux équations (4) et (6) est évidemment réciproque; si, pour abréger, nous disons que l'on passe de la première à la seconde à l'aide de la solution R, on passera de la seconde à la première à l'aide de $\frac{1}{\mathrm{R}}$.

Digitized by Google

85. Soit maintenant (x) un réseau à invariants égaux, dont l'équation de Laplace correspondante est (4). Considérons une congruence (yz) conjuguée à ce réseau, (y) et (z) en étant les réseaux focaux. M. *Koenigs* a démontré le théorème suivant:

Le conjugué harmonique x' de x par rapport à y et z décrit, comme x, un réseau à invariants égaux (x'). Le passage de (x) à (x') se fait à l'aide d'une transformation de Moutard.

Nous appliquerons les résultats du no. 78, en remarquant que l'on a ici $a = b = o$, $c = -h$, l'équation adjointe (17) étant dans notre cas identique à (4).

Si R est une solution de (4), le réseau focal (y) est déterminé par (18), qui devient ici

$$y_u = \mathrm{R}_u x, \; y_v = \mathrm{R}\, x_v$$

et alors l'autre réseau focal (z) est donné par

$$z = y - \mathrm{R}x.$$

Comme cette égalité peut s'écrire

$$\mathrm{R}x = y - z,$$

le conjugué harmonique x' de x par rapport à yz est déterminé par[1])

$$x' = y + z = 2y - \mathrm{R}x.$$

On a de là

$$x'_u = \mathrm{R}_u x - \mathrm{R}\, x_u, \; x'_v = -(\mathrm{R}_v x - \mathrm{R}\, x_v)$$

d'où l'on tire comme au no. précédent que x' satisfait à l'équation de Laplace à invariants égaux

$$\mathrm{R}\, x'_{uv} - \mathrm{R}_v\, x'_u - \mathrm{R}_u x'_v = 0$$

ou, en posant $x' = \mathrm{R}\bar{x}$, à l'équation

$$\bar{x}_{uv} = h' \bar{x},$$

où

$$h' = \mathrm{M}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right).$$

La proposition de M. *Koenigs* est ainsi démontrée. Nous pouvons ajouter les relations qui permettent de passer directement des coordonnées $x^{(i)}$ aux coordonnées $\bar{x}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, à savoir

$$(6) \quad \mathrm{R}(\bar{x} + x)_u = \mathrm{R}_u(x - \bar{x}), \; \mathrm{R}(x - \bar{x})_v = \mathrm{R}_v(x + \bar{x}).$$

---

[1]) Dans le cas où $\mathrm{R} = \Sigma a x$, les a étant des constantes, on peut prendre $\Sigma a y = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2$ donc $\Sigma a x' = 0$, et le réseau (x') est situé dans un L_{n-2}.

Digitized by Google

86. Il y a une sorte de réciproque au théorème précédent, à savoir:

Etant donné un réseau (x) *et une congruence conjuguée* (yz), *si le point* x', *conjugué harmonique de* x *par rapport à* yz, *décrit un réseau* (x'), *conjugué à* (yz), *alors les réseaux* (x) *et* (x') *sont tous les deux à invariants égaux.*

Les deux réseaux (x) et (x') étant conjugués à une congruence sont harmoniques à une autre et on peut alors établier entre eux les relations (voir no. 80 et 81).

$$x'_u = m\,x_u\,,\quad x'_v = n\,x_v\,.$$

Comme les foyers y et z de xx' sont

$$y = x' - m\,x\,,\quad z = x' - n\,x\,,$$

on voit qu'ils sont conjugués harmoniques par rapport à yz si $m + n = o$; mais alors, de

$$(7)\qquad x'_u = m\,x_u\,,\quad x'_v = -m\,x_v$$

on déduit

$$(m\,x_u)_v + (m\,x_v)_u = o\,,\quad \left(\frac{x'_u}{m}\right)_v + \left(\frac{x'_v}{m}\right)_u = o\,,$$

qui prouvent que (x) et (x') sont des réseaux à invariants égaux.

87. Des deux propositions que nous venons de démontrer aux no. 85 et 86 nous pouvons tirer deux conséquences également importantes. D'abord, en partant d'un réseau à invariants égaux (x), on détermine par quadratures, à l'aide d'une solution de son équation de Laplace, un autre réseau à invariants égaux (x'); de celui-ci, par le même procédé, on en déduit un autre qui, en général, est différent du réseau initial (x) et ainsi de suite. Géométriquement cette méthode de M. Koenigs est très simple, elle se réduit à déterminer une congruence (yz) conjuguée au réseau (x) que l'on vent transformer et à prendre le conjugué harmonique x' de x par rapport au couple focal yz.

En second lieu, la proposition du no. 86 donne une méthode géométrique pour reconnaître si un réseau (x) est à invariants égaux. Il suffit de prendre une congruence (yz) quelconque, conjuguée à (x), et de constater si le point x', conjugué harmonique de x par rapport au couple focal yz, décrit un réseau.

88. Si (x) et (x') sont deux réseaux à invariants égaux, déduits l'un de l'autre par une transformation de *Koenigs-Moutard*, il est intéressant d'étudier les relations géométriques qui existent entre les deux coniques attachées, suivant le théorème de Koenigs (no. 83), à ces deux réseaux.

Les réseaux (x) et (x') étant conjugués à une congruence (yz) sont harmoniques à une congruence $(y'z')$. Je dis que *les deux coniques* C *et* C', *qui correspondent aux points* x *et* x', *coupent la droite* $y'z'$ *aux mêmes points.*

Digitized by Google

Nous pouvons toujours supposer qu'entre les réseaux (x) et (x') on a les relations (7). Alors les foyers du rayon xx' sont

$$y = x' - m\,x,\ z = x' + m\,x,$$

la congruence (yz) étant ainsi conjuguée à (x) et à (x').

Les foyers du rayon $y'z'$, appartenant à la congruence $(y'z')$, à laquelle (x) et (x') sont harmoniques, sont donnés par

$$y' = x_u,\ z' = x_v,$$

ou encore par

$$y' = x_{-1} - bx,\ z' = x_1 - ax,$$

a, b étant les coefficients de l'équation de Laplace de (x), à savoir

$$a = \frac{m_v}{2m},\ b = \frac{m_u}{2m}.$$

Si nous représentons, comme au no. 83, tout point ξ du plan $x_{-1}\,x\,x_1$ par

$$\xi = \alpha\,x + \beta\,x_1 + \gamma\,x_{-1},$$

on a pour y': $\alpha = -b$, $\beta = o$, $\gamma = 1$, pour z': $\alpha = -a$, $\beta = 1$, $\gamma = o$. L'équation de la droite $y'z'$ est par conséquent

$$\alpha + a\beta + b\gamma = 0.$$

Comme l'équation de la conique C est

$$\alpha^2 - 2h\beta\gamma = 0,$$

ses points communs avec $y'z'$ sont déterminés par

$$t = -(a\beta + b\gamma)\,x + \beta\,x_1 + \gamma\,x_{-1} = \beta\,x_v + \gamma\,x_u$$

β et γ vérifiant la relation

$$(a\beta + b\gamma)^2 - 2h\beta\gamma = 0,$$

ou encore par

$$t = x_u + \lambda\,x_v,$$

λ étant une des racines de l'équation

$$a^2\lambda^2 - 2\,a_u\,\lambda + b^2 = 0.$$

D'une manière analogue on trouve que les points communs à C' et à $y'z'$ sont déterminés par

$$t' = x'_u + \lambda'\,x'_v = m\,(x_u - \lambda' x_v)$$

λ' étant une des racines de

$$a'^2\lambda'^2 - 2\,a'_u\,\lambda' + b'^2 = 0,$$

Comme on a

$$a' = -\frac{m_v}{2m} = -a,\ b' = -\frac{m_u}{2m} = -b,$$

Digitized by Google

l'équation précédente devient

$$a^2 \lambda'^2 + 2 a_u \lambda' + b^2 = 0,$$

on a donc $\lambda' = -\lambda$ et les points t' se confondent avec les points t. La proposition que nous avions en vue est ainsi démontrée.

89. Les points x, x', $y' = x_u$ et $z' = x_v$ définissent un espace à trois dimensions E_3, dans lequel se trouvent situées les deux coniques C et C'. Comme celles-ci se coupent en deux points, elles déterminent un faisceau de surfaces du second ordre de E_3. Parmi ces surfaces il y en a deux qui sont des cônes. On peut dire encore que C et C' sont *en perspective* par rapport à deux centres de perspectivité, les sommets des deux cônes. Nous allons démontrer que ces deux derniers points sont les transformés de Laplace y_1 et z_{-1} des foyers $y = x' - mx$ et $z = x' + mx$ du rayon xx'.

Un point X de E_3 peut être déterminé de la façon suivante

$$X = \xi x + \eta x' + \zeta y' + \tau z' \equiv \xi x + \eta x' + \zeta x_u + \tau x_v,$$

ξ, η, ζ, τ étant les coordonnées projectives de X par rapport au tétraèdre fondamental $xx'y'z'$. Nous voulons trouver, dans ce système, les équations des coniques C et C'.

Occoupons-nous d'abord de C. Son équation par rapport à xx_1x_{-1} est

$$a^2 - 2h\beta\gamma = 0.$$

Remarquons d'abord que, pour établir cette équation, nous avons représenté un point quelconque du plan $xx_1 x_{-1}$ par

$$\alpha x + \beta x_1 + \gamma x_{-1} \equiv (\alpha + a\beta + b\gamma) x + \gamma x_u + \beta x_v,$$

on a donc pour ce point

$$\xi = \alpha + a\beta + b\gamma, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \gamma, \quad \tau = \beta,$$

d'où

$$\alpha = \xi - a\tau - b\zeta, \quad \beta = \tau, \quad \gamma = \zeta,$$

et par conséquent les équations de C sont

$$\eta = 0, \quad (\xi - a\tau - b\zeta)^2 - 2h\zeta\tau = 0$$

ou

$$(C) \quad \eta = 0, \quad \xi^2 + b^2\zeta^2 + a^2\tau^2 - 2b\xi\zeta - 2a\xi\tau - 2a_u\zeta\tau = 0.$$

Passons maintenant à la conique C'. Son équation par rapport au triangle fondamental $x'x'_1x'_{-1}$ est

$$a'^2 - 2h'\beta'\gamma' = 0.$$

Un point quelconque du plan $x'x'_1x'_{-1}$ ayant pour coordonnées

$$\alpha'x' + \beta'x'_1 + \gamma'x'_{-1} \equiv (\alpha' + a'\beta' + b'\gamma') x' + \gamma'x'_u + \beta'x'_v$$

ou encore, parceque $a' = -a$, $b' = -b$, $x'_u = mx_u$, $x'_v = -mx_v$,

$$(\alpha' - a\beta' - b\gamma') x' + m\gamma' x_u - m\beta' x_v.$$

Digitized by Google

On a donc pour ce point

$$\xi = o, \quad \eta = a - a\beta' - b\gamma', \quad \zeta = m\gamma', \quad \tau = -m\beta',$$

d'où

$$\alpha' = \eta - \frac{a}{m} b + \frac{b}{m} \zeta, \quad \beta' = -\frac{\tau}{m}, \quad \gamma' = \frac{\zeta}{m}$$

et par conséquent les équations de C′ sont

$$(C') \quad \xi = o, \quad m^2\eta^2 + a^2\tau^2 + b^2\zeta^2 + 2mb\eta\zeta - 2ma\eta\tau - 2a_u\zeta\tau = o.$$

Il est aisé maintenant de former l'équation du faisceau des surfaces du second ordre qui passent par les coniques C et C′, à savoir

$$\xi^2 + m^2\eta^2 + b^2\zeta^2 + a^2\tau^2 + 2mb\eta\zeta - 2b\xi + 2\lambda\xi\eta - 2a\xi\tau - 2ma\eta\tau - 2a_u\zeta\tau = o$$

où λ est un paramètre arbitraire. Cette équation représente un cône pour $\lambda = \pm m$.

Si on prend $\lambda = m$, le sommet du cône correspondant a pour coordonnées

$$\xi = ab - a_u, \quad \eta = \frac{h}{m}, \quad \zeta = o, \quad \tau = 2b.$$

D'autre part l'autre foyer de yy_v est de la forme

$$y_1 = x_1 + \mu y = x_v + ax + \mu(x' - mx),$$

où μ doit être déterminé de manière que $(y_1)u$ ait la même forme, ce qui donne

$$\mu = \frac{h}{m_u},$$

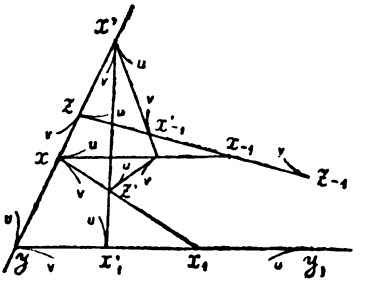
on peut donc prendre

$$y_1 = m_u(x_v + ax) + h(x' - mx),$$

dont les coordonnées projectives par rapport au tétraèdre fondamental $xx'x_u x_v$ sont celles que nous venons de trouver pour un des cônes du faisceau.

On prouverait de même que le cône qui correspond à $\lambda = -m$ a le sommet au point z_{-1}.

Nous représentons sur la figure suivante les points qui interviennent dans la démonstration, pour mieux s'en rendre compte. Nous n'avons pu représenter aussi la conique C, tangente en x_1 et x_{-1} à xx_1 et à xx_{-1}, et la conique C′, tangente en x'_1 et x'_{-1} à $x'x'_1$ et à $x'x'_{-1}$.



Digitized by Google

III. THÉORÈME DE BIANCHI.

90. En étudiant l'application successive de la transformation de Moutard, M. *Bianchi* a trouvé (en 1890) un théorème intéressant (Lezioni di Geometria differenziale, 2-e éd., vol. II, p. 69), à savoir:

Si deux équations de Laplace à invariants égaux

$$(8) \quad x_{uv} = h'x, \; x_{uv} = h''x$$

admettent une transformée commune de Moutard

$$(9) \quad x_{uv} = hx,$$

elles en ont une infinité, dépendant d'une constante arbitraire.

Pour faire la démonstration remarquons d'abord que l'on passe de (9) aux équations (8), à l'aide de deux solutions R′ et R″, par les formules

$$(10) \quad (\mathrm{R}'x')_u = \mathrm{R}'^2\left(\frac{x}{\mathrm{R}'}\right)_u, \; (\mathrm{R}'x')_v = -\mathrm{R}'^2\left(\frac{x}{\mathrm{R}'}\right)_v,$$

$$(11) \quad (\mathrm{R}''x'')_u = \mathrm{R}''^2\left(\frac{x}{\mathrm{R}''}\right)_u, \; (\mathrm{R}''x'')_v = -\mathrm{R}''^2\left(\frac{x}{\mathrm{R}''}\right)_v,$$

et on a de plus

$$h' = \mathrm{M}\left(\frac{1}{\mathrm{R}'}\right), \quad h'' = \mathrm{M}\left(\frac{1}{\mathrm{R}''}\right),$$

M désignant le symbole que nous avons introduit au no. 84.

A toute solution x de (9) les formules (10) font correspondre une infinité de solutions x' de la première équation (8), et (11) une infinité de solutions x'' de la seconde équation (8).

Prenons dans (10) pour x la solution R″ et soit R'_1 une des valeurs de x', on aura

$$(12) \quad (\mathrm{R}'\mathrm{R}'_1)_u = \mathrm{R}'^2\left(\frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}\right)_u, \; (\mathrm{R}'\mathrm{R}'_1)_v = -\mathrm{R}'^2\left(\frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}\right)_v.$$

De la même manière soit $x'' = \mathrm{R}''_1$ une des valeurs qui correspond, à l'aide de (11), à $x = \mathrm{R}'$, donc

$$(13) \quad (\mathrm{R}''\mathrm{R}''_1)_u = \mathrm{R}''^2\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}''}\right)_u, \; (\mathrm{R}''\mathrm{R}''_1)_v = -\mathrm{R}''^2\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}''}\right)_v.$$

De (12) et (13) on tire

$$\mathrm{R}'\mathrm{R}'_1 + \mathrm{R}''\mathrm{R}''_1 = \text{const.}$$

Comme $\mathrm{R}'\mathrm{R}'_1$ est défini par (12) à une constante additive près, et comme il en est de même de $\mathrm{R}''\mathrm{R}''_1$, on peut choisir d'une infinité de manière ces constantes de manière que l'on ait

$$\mathrm{R}'\mathrm{R}'_1 + \mathrm{R}''\mathrm{R}''_1 = 0.$$

Digitized by Google

Le théorème de Bianchi se réduit à démontrer que l'on a

$$M\left(\frac{1}{R'_1}\right) = M\left(\frac{1}{R''_1}\right),$$

parce que alors l'équation

$$M(x) = \bar{h} = M\left(\frac{1}{R'_1}\right) = M\left(\frac{1}{R''_1}\right)$$

est une transformée de Moutard de l'une et de l'autre des équations (8).

Or on a

$$M\left(\frac{1}{R''_1}\right) = R''_1\left(\frac{1}{R''_1}\right)_{uv} = \frac{R'}{R''}R'_1\left(\frac{R''}{R'}\frac{1}{R'_1}\right)_{uv}$$

$$= \frac{R'}{R''}R'_1\left[\frac{R''}{R'}\left(\frac{1}{R'_1}\right)_{uv} + \left(\frac{R''}{R'}\right)_v\left(\frac{1}{R'_1}\right)_u + \left(\frac{R''}{R'}\right)_u\left(\frac{1}{R'_1}\right)_v + \frac{1}{R'_1}\left(\frac{R''}{R'}\right)_{uv}\right]$$

donc, en vertu de $M(R') = M(R'')$

$$M\left(\frac{1}{R''_1}\right) - M\left(\frac{1}{R'_1}\right) = \frac{R'}{R''}\left[2\frac{R''}{R'}R'_u R'_v - \frac{R'_v R''_u}{R'^2} - \frac{R'_u R''_v}{R'^2}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{R''}{R'}\right)_v \frac{(R'_1)_u}{R'_1} - \left(\frac{R''}{R'}\right)_u \frac{(R'_1)_v}{R'_1}\right]$$

ou, en vertu de (12),

$$M\left(\frac{1}{R''_1}\right) - M\left(\frac{1}{R'_1}\right) = \frac{1}{R'R''}\left[2\frac{R''}{R'}R'_u R'_v - R'_v R''_u - R'_u R''_v\right.$$

$$\left. + R'_v (R'_1)_u - R'_u (R'_1)_v\right]$$

et le second membre est nul en vertu de (12). Le théorème de Bianchi, sous sa forme analytique, est par conséquent démontré.

91. M. *Bianchi* a donné une application intéressante de son théorème aux congruences W. Il est intéressant cependant de donner une interprétation géométrique directe, à l'aide de la transformation de Koenigs-Moutard; c'est ce que nous allons faire.

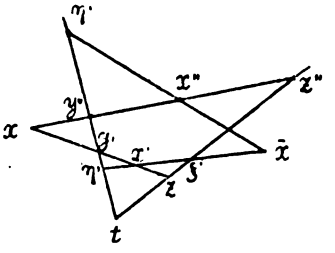
Considérons d'abord le cas où le réseau (x) est général. Soient $(y'z')$ et $(y''z'')$ deux congruences conjuguées à ce réseau, elles sont (no. 79) harmoniques à un même réseau (t).

Soit (x') un réseau conjugué à $(y'z')$ et (x'') un réseau conjugué à $(y''z'')$. Il y a (voir la note à la fin du no. 77) ∞^1 congruences $(\eta'\zeta')$ conjuguées à (x') et harmoniques à (t) et ∞^1 congruences $(\eta''\zeta'')$ conjuguées à (x'') et harmoniques elles aussi à (t). Le point $\bar{x}$, commun à $\eta'\zeta'$ et à $\eta''\zeta''$ décrit un réseau $(\bar{x})$, conjugué en même temps à $(\eta'\zeta')$ et à $(\eta''\zeta'')$. Comme $(\eta'\zeta')$ et $(\eta''\zeta'')$ dépendent chacune d'une constante arbitraire, $(\bar{x})$ dépend de deux. Le passage de $(\bar{x})$ au couple

Digitized by Google

(x') et (x'') se fait de la même manière que de (x) à ce même couple. D'ailleurs (x) fait partie de la double infinité de réseaux $(\bar{x})$.

Nous avons ainsi, sous une forme plus générale et, si l'on veut, plus intuitive, les relations géométriques qui serviront comme fondement à l'interprétation géométrique du théorème de Bianchi. Nous représenterons ces relations dans la figure suivante, où, pour plus le simplicité, nous avons supprimé les courbes des différents réseaux.



92. Le cas général que nous venons de considérer géométriquement est si intéressant, qu'il n'est pas sans intérêt d'en étudier le mécanisme analytique.

Prenons comme réseau initial le réseau (t) avec l'équation de Laplace $\mathrm{L}(t) = 0$. Les congruences harmoniques $(y'z')$ et $(y''z'')$ s'obtiennent à l'aide de deux solutions particulières R et S de cette équation, à savoir, en prenant

$$y' = \mathrm{R}\,t_u - \mathrm{R}_u\,t, \quad z' = \mathrm{R}\,t_v - \mathrm{R}_v\,t,$$
$$y'' = \mathrm{S}\,t_u - \mathrm{S}_u\,t, \quad z'' = \mathrm{S}\,t_v - \mathrm{S}_v\,t.$$

Le point x, commun à $y'z'$ et à $y''z''$, qui décrit le réseau (x), conjugué en même temps aux congruences $(y'z')$ et $(y''z'')$, est donné par

$$x = \begin{vmatrix} t & t_u & t_v \\ \mathrm{R} & \mathrm{R}_u & \mathrm{R}_v \\ \mathrm{S} & \mathrm{S}_u & \mathrm{S}_v \end{vmatrix}.$$

En prenant deux autres solutions R' et S' de $\mathrm{L}(t) = 0$, on a

$$x' = \begin{vmatrix} t & t_u & t_v \\ \mathrm{R} & \mathrm{R}_u & \mathrm{R}_v \\ \mathrm{R}' & \mathrm{R}'_u & \mathrm{R}'_v \end{vmatrix}, \quad x'' = \begin{vmatrix} t & t_u & t_v \\ \mathrm{S} & \mathrm{S}_u & \mathrm{S}_v \\ \mathrm{S}' & \mathrm{S}'_u & \mathrm{S}'_v \end{vmatrix}.$$

Or $\varrho = \mathrm{R} + m\,\mathrm{R}'$ et $\sigma = \mathrm{S} + n\,\mathrm{S}'$, m et n étant des constantes, sont aussi des solutions de $\mathrm{L}(t) = 0$. A la première correspond une congruence $(\eta'\zeta')$ conjuguée à (x'), à la seconde correspond une autre congruence $(\eta''\zeta'')$ conjuguée à (x''). Le point $\bar{x}$, commun à $(\eta'\zeta')$ et à $(\eta''\zeta'')$ est défini par

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} t & t_u & t_v \\ \varrho & \varrho_u & \varrho_v \\ \sigma & \sigma_u & \sigma_v \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

et il décrit le réseau cherché $(\bar{x})$, qui dépend bien de deux constantes arbitraires m et n et qui se réduit pour $m = n = 0$ à (x).

93. Le cas général étant étudié, passons au cas qui nous intéresse, où le réseau (x) est à invariants égaux.

Les congruences $(y'z')$ et $(y''z'')$, conjuguées à (x), étant choisies d'une manière arbitraire, supposons que l'on prenne les conjugués harmoniques x' et x'' de x par rapport à $y'z'$ et $y''z''$ respectivement. On obtient ainsi les réseaux (x') et (x'') à invariants égaux, transformés de (x) à l'aide de deux transformations de Koenigs-Moutard.

Si l'on considère maintenant une autre congruence $(\eta'\zeta')$, conjuguée à (x') et harmonique au même réseau (t) que $(y'z')$ et $(y''z'')$, et de la même manière la congruence $(\eta''\zeta'')$, conjuguée à (x'') et harmonique, elle aussi, à (t), alors le point $\bar{x}$, commun à $\eta'\zeta'$ et à $\eta''\zeta''$, décrit bien un réseau (no. 91 et 92), mais, en général, il n'est pas à invariants égaux. Il le sera sûrement (no. 85), s'il est possible que la droite $x\bar{x}$ passe par t, parce que alors $\bar{x}$ est le conjugué harmonique de x' et de x'' par rapport à $\eta'\zeta'$ et à $\eta''\zeta''$ respectivement.

C'est cette possibilité qu'affirme le théorème de Bianchi et que nous allons démontrer.

Partons, cette fois-ci, du réseau (x), dont l'équation de Laplace est prise sous la forme réduite

$$\mathrm{L} \equiv x_{uv} - h\,x = 0$$

et supposons que (x') et (x'') soient obtenus, par la transformation de Koenigs-Moutard, à l'aide des solutions R′ et R″ de cette équation. On a alors (no. 85)

$$(14)\quad \begin{cases} (x'+x)_u = \dfrac{\mathrm{R}'_u}{\mathrm{R}'}(x-x'), \quad (x'-x)_v = -\dfrac{\mathrm{R}'_v}{\mathrm{R}'}(x+x'); \\ (x''+x)_u = \dfrac{\mathrm{R}''_u}{\mathrm{R}''}(x-x''), \quad (x''-x)_v = -\dfrac{\mathrm{R}''_v}{\mathrm{R}''}(x+x''). \end{cases}$$

Ces relations expriment que $(x+x')$ et $(x-x')$ sont les réseaux focaux de la congruence (xx') conjuguée à (x'), et que de même $(x+x'')$ et $(x-x'')$ sont les réseaux focaux de (xx''). On a donc

$$y' = x + x', \quad z' = x - x', \quad y'' = x + x'', \quad z'' = x - x'',$$

par suite

$$t = x'' - x' \equiv y'' - y' \equiv z' - z''.$$

Il résulte encore des relations (14)

$$(15)\quad \begin{cases} (x''-x')_u = \dfrac{\mathrm{R}''_u}{\mathrm{R}''}(x-x'') - \dfrac{\mathrm{R}'_u}{\mathrm{R}'}(x-x'), \\ (x''-x')_v = \dfrac{\mathrm{R}'_v}{\mathrm{R}'}(x+x') - \dfrac{\mathrm{R}''_v}{\mathrm{R}''}(x+x''). \end{cases}$$

Digitized by Google

Le réseau cherché $(\bar{x})$, dans le cas où il existe, sera obtenu en transformant (x') à l'aide d'une solution ϱ' de l'équation $L' = o$ de (x), ou en transformant (x'') à l'aide d'une solution ϱ'' de l'équation $L'' = o$ de (x''). On a par conséquent

$$(16)\quad \begin{cases} (\bar{x}+x')_u = \dfrac{\varrho'_u}{\varrho}(x'-\bar{x}), \quad (\bar{x}-x')_v = -\dfrac{\varrho'_v}{\varrho'}(x'+x); \\ (\bar{x}+x'')_u = \dfrac{\varrho''_u}{\varrho''}(x''-\bar{x}), \quad (\bar{x}-x'')_v = -\dfrac{\varrho''_v}{\varrho''}(x''+\bar{x}), \end{cases}$$

qui prouvent que les foyers η', ζ' et η'', ζ'' des rayons $\bar{x}x'$ et $\bar{x}\,x''$, appartenant aux congruences $(\bar{x}x')$ et $(\bar{x}x'')$, sont les points

$$\eta' = \bar{x}+x', \quad \zeta' = \bar{x}-x', \quad \eta'' = \bar{x}+x'', \quad \zeta'' = \bar{x}-x'',$$

par suite, on a aussi

$$t = \eta''-\eta' = \zeta'-\zeta''.$$

Il résulte encore des relations (16)

$$(x''-x')_u = \frac{\varrho''_u}{\varrho''}(x''-\bar{x}) - \frac{\varrho'_u}{\varrho'}(x'-\bar{x}),$$
$$(x''-x')_v = \frac{\varrho''_v}{\varrho''}(x''+\bar{x}) - \frac{\varrho'_v}{\varrho'}(x'+\bar{x}),$$

qui, comparées à (15), donnent

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\varrho''_u}{\varrho''}(x''-\bar{x}) - \dfrac{\varrho'_u}{\varrho'}(x'-\bar{x}) = \dfrac{R''_u}{R''}(x-x'') - \dfrac{R'_u}{R'}(x-x'), \\ \dfrac{\varrho''_v}{\varrho''}(x''+\bar{x}) - \dfrac{\varrho'_v}{\varrho'}(x'+\bar{x}) = \dfrac{R'_v}{R'}(x+x') - \dfrac{R''_v}{R''}(x+x''). \end{cases}$$

Si la configuration, que nous donnons comme interprétation géométrique du théorème de Bianchi, est possible, les points $\bar{x}$, x, t sont en ligne droite; il en est de même des points y', y'', η', η'' et des points z', z'', ζ', ζ''. Il est aisé de voir que toutes ces conditions sont remplies si l'on a

$$(18)\quad \bar{x} = x + \theta(x''-x'),$$

θ étant une fonction qu'il s'agit de déterminer de manière que $\bar{x}$ vérifie le système (16). Comme les équations (17) sont une conséquence de ce système, on peut commencer par remplacer $\bar{x}$ dans (17). On obtient ainsi deux relations linéaires et homogènes en x, x' et x'', qui doivent être identiquement vérifiées, parce que les points x, x' et x'' ne sont pas en lignes droite, ce qui donne, en tout, six relations. Deux d'entre elles conduisent aisément à

$$\frac{R''\varrho''}{R'\varrho'} = \text{const.} = m$$

et les quatre autres se réduisent à

$$(19)\quad \theta\left(\log\frac{R''}{R'}\right)_u = -(\log R'\varrho')_u, \quad \theta\left(\log\frac{R''}{R'}\right)_v = (\log R'\varrho')_v.$$

Digitized by Google

Enfin, les relations (16) elles-mêmes donnent

$$\theta_u = \theta\left(\frac{R''_u}{R''} - \frac{\rho'_u}{\rho'}\right), \quad \theta_v = \theta\left(\frac{R''_v}{R''} - \frac{\rho'_v}{\rho'}\right),$$

d'où

$$\theta = n\frac{R''}{\rho'}, \quad n = \text{const.}$$

Comme on peut multiplier ρ' et ρ'' par des constantes sans que les relations (16) changent, on peut prendre $m = -1$, $n = 1$, donc

$$R'\rho' + R''\rho'' = o, \quad \theta = -\frac{R''}{\rho'}$$

dont la première donne ρ'' lorsque ρ' est connu et la seconde détermine θ. En introduisant cette valeur de θ dans (19), on a

$$(20) \quad (R'\rho')_u = R'^2\left(\frac{R''}{R'}\right)_u, \qquad (R'\rho')_v = -R'^2\left(\frac{R''}{R'}\right)_v$$

qui prouve que ρ' est la solution, avec une constante arbitraire, de $L' = o$ qui correspond, par la transformation de Moutard, à la solution R'' de $L = o$.

D'après le théorème analytique de Bianchi, la fonction

$$\rho'' = -\frac{R'\rho'}{R''}$$

est une solution de $L'' = o$, une de celles qui correspondent à la solution R' de $L = o$.

On peut donc énoncer la proposition suivante:

Si (x') et (x'') sont deux réseaux à invariants égaux, transformés de Koenigs-Moutard du réseau (x), à l'aide des solutions R' et R'' de l'équation de Laplace correspondante (9), *il existe ∞^1 réseaux à invariants égaux $(\bar{x})$, transformés communs de (x') et de (x'') par la transformation de Koenigs-Moutard. Les réseaux $(\bar{x})$ sont déterminés par*

$$\bar{x} = x - \frac{R''}{\rho'}(x'' - x'),$$

ρ' étant une solution quelconque de (20).

Si ρ'_0 est une solution particulière de (20), l'intégrale générale est

$$\rho' = \rho'_0 + \frac{const.}{R'}$$

Pour const. $= \infty$, ou encore mieux, pour $\theta = o$, le réseau $(\bar{x})$ se réduit à (x).

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

RÉSEAUX QUADRATIQUES.

I. TRANSFORMATION DE RIBAUCOUR.

94. *Définition.* Nous dirons qu'un réseau (x), appartenant à un espace projectif E_{n-1} à $n-1$ dimensions, est un *réseau quadratique*, s'il est tracé sur un espace (variété) quadratique non-singulier à $n-2$ dimensions Q_{n-2}, c'est-à-dire lorsque les coordonnées $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du point x, qui décrit le réseau, vérifient une équation quadratique

$$\Sigma a_{ik} x^{(i)} x^{(k)} = 0$$

à discriminant différent de zéro.

Comme, par une transformation projective, on peut réduire l'équation précédente à la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} [x^{(i)}]^2 = 0$$

que nous écrirons toujours sous la forme

$$(1) \quad \Sigma x^2 = 0,$$

c'est cette équation que nous supposerons vérifiée par les coordonnées $x^{(i)}$.

95. *Transformation de Ribaucour.* Ribaucour a trouvé (en 1872) un théorème sur les réseaux quadratiques d'un espace E_3 à trois dimensions et qui permet d'en déduire d'autres réseaux quadratiques du même espace. Ce théorème a lieu pour tout espace E_{n-1} et il est fondamental dans la théorie des réseaux quadratiques.

Nous considérerons d'abord le cas simple d'un réseau quadratique de notre espace, où la démonstration du théorème de Ribaucour peut se faire géométriquement.

Soit (yz) une congruence donnée de E_3 et supposons que le point x, où yz coupe la surface du second ordre Q, décrit un réseau (x), conjugué à (yz). Comme les tangentes xx_u et xx_v du réseau en x sont contenues dans les plans tangents aux développables (u) *et* (v) de la congruence le long de yz — plans tangents que l'on appelle *les plans focaux* Y et Z du rayon yz —, et comme les tangentes xx_u et xx_v sont des droites conjuguées par rapport à Q (nos 51 et 52), il résulte que les plans focaux Y et Z sont conjugués par rapport à la quadrique Q.

On a donc d'abord le résultat suivant:

Si une congruence (yz) *détermine sur une quadrique non singulière* Q *de* E_3 *un réseau conjugué* (x), *les plans focaux de tout rayon* yz *sont conjugués par rapport à* Q.

Digitized by Google

Nous allons démontrer la réciproque de cette proposition. Nous supposerons donc que les plans tangents Y et Z le long de yz aux développables (u) et (v) de (yz), soient conjugués par rapport à la quadrique Q. Soit x un des points où yz coupe Q. Les tangentes xx_u et xx_v aux courbes qui correspondent aux développables de (yz), étant contenues dans les plans focaux Y et Z, et ces plans étant conjugués par rapport à Q, ces tangentes le sont aussi et les courbes u et v tracent un réseau (x) sur Q. Il en est évidemment de même du second point x', où yz coupe Q.

En combinant la proposition directe et la réciproque on a le théorème de Ribaucour que nous énoncerons sous la forme suivante (*Darboux*, Théorie des surfaces, Tome II, p. 289):

Si les développables formées par les droites d'une congruence découpent, à leur entrée, un réseau conjugué sur une surface du second degré, elles découpent aussi à la sortie un second réseau conjugué.

96. Après avoir considéré le cas particulier élémentaire du théorème de Ribaucour, nous pouvons attaquer le cas général.

Soit (x) un réseau de E_{n-1}, tracé sur l'espace quadratique Q_{n-2} représenté par (1), et dont l'équation de Laplace est

$$L = x_{uv} + ax_u + bx_v + c\,x = 0.$$

Considérons une congruence (xy), conjuguée à (x) et dont (y) soit un des réseaux focaux. Je dis que le second point x', où xy coupe Q_{n-2}, décrit aussi un réseau (x'), qui est évidemment quadratique. C'est là le théorème de Ribaucour généralisé que nous allons démontrer.

Nous supposons que le réseau focal (y) de (xy) est défini par (no. 78)

$$(2) \quad y_u = (R_u - b\,R)\,x,\ y_v = R\,(x_v + a\,x),$$

R étant une solution de l'équation

$$R_{uv} - (a\,R)_u - (b\,R)_v + c\,R = 0$$

adjointe de $L = 0$.

D'ailleurs, si x et y sont deux solutions quelconques du système (2), en éliminant y on voit que x est nécessairement une solution de $L = 0$, et éliminant x on voit que y est une solution de l'équation de Laplace $L' = 0$ qui correspond au réseau (y).

Soit maintenant x' le point où xy coupe de nouveau l'espace quadratique (1). On a

$$x' = y + \lambda x,$$

où λ est déterminé par

$$\Sigma\,(y + \lambda x)^2 = \Sigma\,y^2 + 2\,\lambda\,\Sigma\,x\,y = 0$$

Digitized by Google

ou, en posant

$$X = 2\Sigma xy,\ Y = \Sigma y^2,$$

par

$$Y + \lambda X = 0.$$

On peut donc prendre

$$(3)\quad x' = Xy - Yx.$$

Il s'agit de démontrer que ce point décrit un réseau (x') conjugué à (xy). A cet effet remarquons d'abord que, à l'aide de (2), on prouve aisément que l'on a

$$(4)\quad Y_u = (R_u - bR)X,\ Y_v = R(X_v + aX)$$

qui montrent[1]) que X est une solution de $L = 0$ et Y une solution de $L' = 0$.

On a alors

$$(R_u - bR)x' = Y_u y - Y y_u$$

qui démontre bien (no. 76) que x' décrit un réseau conjugué à la congruence $(yy_u) \equiv (xy)$. Le théorème de Ribaucour est ainsi complètement démontré. Cependant il faut remarquer que nous avons supposé dans la démonstration $XY \equiv 0$, c'est-à-dire que la congruence (xy) n'est pas tracée sur l'espace quadratique (1). Dans ce cas la transformation de Ribaucour devient indéterminée; tout réseau (x'), conjugué à une telle congruence, répond à la question.

97. *Congruences quadratiques.* Si les ∞^2 droites d'une congruence de E_{n-1} appartiennent à un même espace quadratique, non singulier Q_{n-2}, représenté par (1), nous dirons que c'est une *congruence quadratique.*

On peut définir une telle congruence par un de ses réseaux focaux (x). Si (xx_1) est une congruence quadratique, on a

$$(5)\quad \Sigma x^2 = 0,\quad \Sigma x_v^2 = 0,$$

et ces conditions sont en même temps suffisantes.

Nous voulons démontrer maintenant qu'en appliquant une transformation de Ribaucour au réseau quadratique (x), on obtient une nouvelle congruence quadratique $(x'x'_1)$.

Le réseau transformé (x') est défini par (3) et un calcul très simple prouve que l'on a, en vertu de (5),

$$\Sigma x'^2 = 0,\quad \Sigma x'^2_v = 0$$

qui démontrent que la congruence $(x'x'_1)$ est, elle aussi, quadratique.

Les congruences (xx_1) et $(x'x'_1)$ sont toutes les deux harmoniques au réseau focal (y) de (xy), les droites xx_1 et $x'x'_1$ ont donc un point commun z, qui décrit

[1]) Voir une Note très intéressante de M. *Jules Drach* dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1897.

Digitized by Google

un réseau (z), conjugué en même temps à (xx_1) et à $(x'x'_1)$. Ce réseau (z) est évidemment un réseau quadratique.

Nous démontrerons (no. 128) que, à tout réseau quadratique d'un E_{n-1}, il y a, pour $n > 5$, des congruences conjuguées qui sont quadratiques.

II. THÉORÈME DE PERMUTABILITÉ.

97 bis. Nous venons de voir que la transformation de Ribaucour peut être tout aussi bien appliquée à un réseau quadratique qu'à un réseau focal d'une congruence quadratique.

Dans l'application successive de cette transformation il se présente une circonstance remarquable, mise en évidence pour la première fois, dans le cas de la transformation de Koenigs-Moutard pour les réseaux à invariants égaux, par M. *Bianchi* (no. 90), et que nous appellerons aussi théorème de permutabilité.

Soit (x) un réseau quadratique quelconque de E_n, (x') et (x'') deux transformés de Ribaucour de ce réseau. Il s'agit de démontrer que les réseaux (x') et (x'') sont les transformés de Ribaucour, non seulement de (x), mais de ∞^1 (d'une simple infinité) de réseaux quadratiques $(\bar{x})$. C'est en cela que consiste le théorème de permutabilité.

Avant d'en donner la démonstration analytique, il convient d'en voir le fondement géométrique (voir le no. 91).

A cet effet nous remarquerons d'abord que les réseaux (x') et (x'') s'obtiennent de (x) à l'aide de deux congruences (xy') et (xy'') conjuguées à ce réseau. Ces deux congruences sont harmoniques (no. 79) à un même réseau (ξ).

Il y a (voir la note à la fin du no. 77) ∞^1 congruences harmoniques à (ξ) et conjuguées à (x'), de même ∞^1 congruences harmoniques à (ξ) et conjuguées à (x'').

Le théorème de permutabilité consiste à prouver que, parmi les ∞^2 réseaux conjugués en même temps à une congruence de la première famille et à une congruence de la seconde famille, il y en a ∞^1 qui sont situés sur la même variété quadratique que les réseaux (x), (x') et (x'').

97ter. Nous pouvons maintenant aborder la solution analytique du problème. Soit

$$L \equiv x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0$$

l'équation de Laplace qui correspond à (x); R′ et R″ les solutions de l'équation adjointe

$$R_{uv} - (aR)_u - (bR)_v + cR = 0,$$

à l'aide des quelles (no. 78) on obtient les réseaux focaux (y') et (y'') des congruences (xy') et (xy''), conjuguées à (x), par les relations

$$(I)\quad \begin{cases} y'_u = (R'_u - b\,R')\,x = R'_{-1}\,x, & y'_v = R'\,(x_v + a\,x) = R'\,x_1; \\ y''_u = (R''_u - b\,R'')\,x = R''_{-1}\,x, & y''_v = R''\,(x_v + a\,x) = R''\,x_1. \end{cases}$$

Digitized by Google

Ces relations constituent une liaison entre les solutions de l'équation $L = o$ et celles qui correspondent aux réseaux (y') et (y''), à savoir

$$L' = o, \quad L'' = o.$$

Nous savons (no. 96) que $L = o$ admet les solutions

$$X' = 2\Sigma xy', \quad X'' = 2\Sigma xy'',$$

auxquelles correspondent, à l'aide des formules (I), respectivement pour $L' = o$, et $L'' = o$, les solutions

$$Y' = \Sigma y'^2, \quad Y'' = \Sigma y''^2,$$

à savoir, on a

$$Y'_u = R'_{-1} X', \; Y'_v = R' X'_1; \; Y''_u = R''_{-1} X'', \; Y''_v = R'' X''_1.$$

Soit maintenant $\bar{Y}'$ la solution de $L' = o$ qui correspond à la solution X'' de $L = o$ et $\bar{Y}''$ la solution de $L'' = o$ qui correspond à X', c'est-à-dire définissons $\bar{Y}'$ et $\bar{Y}''$ par

$$\bar{Y}'_u = R'_{-1} X'', \; \bar{Y}'_v = R' X''_1; \; \bar{Y}''_u = R''_{-1} X', \; \bar{Y}''_v = R'' X'_1$$

à des constantes additives près.

Or, si l'on pose

$$Y = 2\Sigma y' y'',$$

on a

$$Y_u = \bar{Y}'_u + \bar{Y}''_u, \; Y_v = \bar{Y}'_v + \bar{Y}''_v,$$

donc

$$Y = \bar{Y}' + \bar{Y}'' + \text{const.}$$

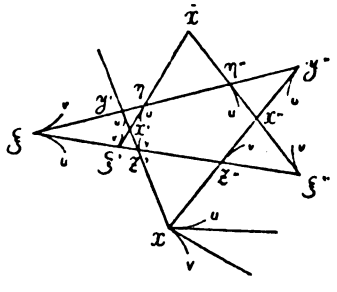
et comme $\bar{Y}'$ et $\bar{Y}''$ ne sont définies qu'à des constantes additives près, on peut toujours prendre

$$Y = \bar{Y}' + \bar{Y}''.$$

La figure suivante guidera aisément nos raisonnements. Les points z' et z'' sont les autres foyers des rayons xy' et xy'', définis par

$$z' = y' - R'x, \; z'' = y'' - R''x.$$

Soit $(\eta'\zeta')$ une congruence conjuguée à (x') et harmonique à (ξ), $(\eta''\zeta'')$ une autre congruence conjuguée à (x'') et harmonique elle aussi à (ξ).



Digitized by Google

On a d'abord

$$\eta' = y'' + \lambda y', \quad \zeta' = z'' + \mu z',$$

les points η' et ζ' étant situés sur les droites $y'y''$ et $z'z''$, $\eta'\zeta'$ passe par le point x', défini (no. 96) par

$$x' = X'y' - Y'x$$

si l'on a

$$(Y' - R'X')\mu = \lambda Y' + R''X'.$$

Si nous écrivons que η'_u est situé sur $\eta'x'$ et que ζ'_v est situé sur $\zeta'x'$, on obtient

$$(\lambda Y')_u = -\bar{Y}''_u, \quad (\lambda Y')_v = -\bar{Y}''_v.$$

On peut donc prendre

$$\lambda Y' = -\bar{Y}'',$$

la constante additive résultant de l'intégration étant supposée incorporée dans celle qui figure déjà dans la définition de $\bar{Y}''$.

On pourra alors poser

$$\eta' = \bar{Y}''y' - Y'y''$$

et de la même manière

$$\eta'' = Y''y' - \bar{Y}'y''.$$

Considérons maintenant le point $\bar{x}$ commun aux droites $\eta'x'$ et $\eta''x''$. On a

$$\bar{x} = (\bar{Y}'\bar{Y}'' - Y'Y'')\,x + (X'Y'' - X''\bar{Y}'')\,y' + (X''Y' - X'\bar{Y}')y''.$$

Ce point dépend en général de deux constantes arbitraires, cependant si l'on a

$$2\Sigma y'y'' = Y = \bar{Y}' + \bar{Y}'',$$

il dépendra d'une seule constante et dans ce cas, il est facile de le vérifier, on a

$$\Sigma \bar{x}^2 = 0.$$

Le théorème de permutabilité est ainsi établi dans toute sa généralité.

III. RÉSEAUX QUADRATIQUES À INVARIANTS ÉGAUX.

98. Si le réseau (x) est en même temps quadratique et à invariants égaux, une transformation de Ribaucour permet d'en déduire un autre réseau qui est quadratique, mais qui, en général, n'est pas à invariants égaux. De même une transformation de Koenigs-Moutard donne un nouveau réseau à invariants égaux, mais qui n'est pas, en général, situé sur l'espace quadratique (1).

Il y a donc là un problème fondamental, qui a, d'ailleurs, des applications étendues:

Trouver parmi les réseaux (x'), déduits de (x), à l'aide de la transformation de Koenigs-Moutard, ceux qui sont en même temps quadratiques.

Digitized by Google

Ce problème est assez délicat et, avant de le traiter dans toute sa généralité, nous considérerons d'abord le cas particulier où (x) est situé dans un E_3 et qui peut être étudié par une méthode spéciale, intéressante par les résultats analytiques et géométriques auxquels elle conduit.

99. Soit (x) un réseau à invariants égaux tracé sur la quadrique Q_2 de l'espace projectif E_3. Les coordonnées projectives $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ du point générateur x vérifient les équations

$$(6) \quad x_{uv} = h\,x$$

et

$$(7) \quad \Sigma x^2 = 0.$$

On tire de là facilement, d'abord

$$(8) \quad \Sigma\, x\, x_u = 0\,,\ \Sigma\, x\, x_v = 0\,,\ \Sigma\, x_u\, x_v = 0\,,$$

ensuite

$$(9) \quad (\Sigma\, x_u^2)_v = 0\,,\ (\Sigma x_v^2)_u = 0\,,$$

d'où l'on a

$$(10) \quad \Sigma\, x_u^2 = U,\ \Sigma\, x_v^2 = V$$

U étant une fonction seulement de u et V seulement de v.

On ne peut pas avoir $U = V = 0$, car on déduirait

$$\Sigma\, dx^2 = \Sigma\,(x_u\, du + x_v\, dv)^2 = 0,$$

c'est-à-dire toute tangente en x à Q_2 serait contenue par cette quadrique, ce qui est absurde.

On ne peut avoir non plus $U = 0$, $V \neq 0$, car on aurait les relations

$$\Sigma\, x\, x_u = 0\,,\ \Sigma\, x_u^2 = 0\,,\ \Sigma\, x_u\, x_v = 0\,,\ \Sigma\, x_u\, x_{uu} = 0$$

d'où, en éliminant x_u, on conclurait que les $x^{(i)}$ satisfont à une équation de la forme

$$(11) \quad x_{uu} + \alpha\, x_u + \beta\, x_v + \gamma\, x = 0.$$

Or de celle-ci on tire

$$\Sigma\, x_v\, x_{uu} + \alpha\,\Sigma\, x_u\, x_v + \beta\,\Sigma\, x_v^2 + \gamma\,\Sigma\, x\, x_v = 0$$

et comme on a

$$\Sigma\, x\, x_v = 0,\ \Sigma\, x_v^2 = V \neq 0,\ \Sigma\, x_u\, x_v = 0$$

et que de la dernière on obtient

$$0 = \Sigma\, x_v x_{uu} + \Sigma\, x_u\, x_{uv} = \Sigma\, x_v x_{uu} + h\,\Sigma\, x\, x_u = \Sigma\, x_v x_{uu},$$

il résulte en définitive $\beta = 0$. L'équation (11) se réduit donc à

$$x_{uu} + \alpha\, x_u + \gamma\, x = 0$$

Digitized by Google

qui prouverait que les courbes u du réseau (x) seraient (no. 31) des génératrices rectilignes de Q_2, ce qui serait absurde, parce que ces droites sont conjuguées avec elles-mêmes et n'admettent pas d'autres courbes v conjuguées.

On a donc nécessairement $UV \neq 0$ et on peut alors, par un changement des variables indépendantes u et v, qui ne change pas les courbes du réseau (x) et qui ne change pas non plus la forme de l'équation (6), réduire les équations (10) à

$$(10') \quad \Sigma x_u^2 = 1, \ \Sigma x_v^2 = -1.$$

100. Cela étant, remarquons que l'on peut déterminer les fonctions m, a, b, k de manière que l'équation

$$(12) \quad x_{uu} + m x_{vv} = a x_u + b x_v + k x$$

soit vérifiée par $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; en effet, en y remplaçant successivement x par $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ et $x^{(4)}$, on obtient quatre équations linéaires par rapport aux coefficients inconnus m, a, b, k et dont le déterminant est sûrement différent de zéro.

D'ailleurs, en tenant compte des relations (7), (8), (10') et des suivantes, qui en sont la conséquence

$$\Sigma x x_{uu} = 1, \ \Sigma x x_{vv} = 1, \ \Sigma x_u x_{uu} = 0$$

$$\Sigma x_v x_{vv} = 0, \ \Sigma x_v x_{uu} = 0, \ \Sigma x_u x_{vv} = 0$$

on peut aisément déterminer les valeurs de m, a et b. On a en effet de (12)

$$\Sigma x x_{uu} + m \Sigma x x_{vv} = a \Sigma x x_u + b \Sigma x x_v + k \Sigma x^2,$$

d'où $m = 1$. En multipliant par x_u et ensuite par x_v on obtient $a = b = 0$.

On a donc le résultat suivant: *Les coordonnées* $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *d'un point* x, *qui décrit un réseau à invariants égaux* (x), *tracé sur la quadrique* Q_2 *de* E_3, *sont des solutions communes d'un système d'équations aux dérivées partielles de la forme:*

$$(13) \quad x_{uv} = h x, \ x_{uu} + x_{vv} = k x.$$

101. Nous voulons démontrer maintenant que réciproquement *tout système complètement intégrable de la forme* (13) *définit, à une transformation projective près un réseau quadratique à invariants égaux de* E_3.

Etablissons d'abord les conditions d'intégrabilité du système (13). En dérivant par rapport à u et par rapport à v on tire de ce système 4 équations qui donnent les dérivées troisièmes de x, à savoir

$$x_{uuu} = k x_u - h x_v + (k_u - h_v) x, \ x_{uuv} = h x_u + h_u x,$$

$$x_{uvv} = h x_v + h_v x, \ x_{vvv} = -h x_u + k x_v + (k_v - h_u) x.$$

Si l'on écrit maintenant que les dérivées du quatrième ordre de x, que l'on obtient deux fois, sont égales, c'est-à-dire si l'on écrit que l'on a

$$(x_{uuu})_v = (x_{uuv})_u, \ (x_{uuv})_v = (x_{uvv})_u, \ (x_{uvv})_v = (x_{vvv})_u$$

Digitized by Google

et que l'on tienne compte de (13), on obtient des équations du premier ordre qui doivent se réduire à des identités, ce qui donne les conditions cherchées

$$k_u = 2h_v,\ k_v = 2h_u,$$

ce qui donne

$$(14)\quad \begin{cases} h = \varphi(u+v) - \psi(u-v) \\ k = 2[\varphi(u+v) + \psi(u-v)], \end{cases}$$

les fonctions φ et ψ étant des fonctions arbitraires des arguments respectifs.

Il résulte de là que *l'équation de Laplace* (6) *qui correspond à un réseau quadratique et à invariants égaux* (x) *de* E_3 *est, suivant la dénomination de M. Darboux (Théorie des surfaces, Tome II, p.* 192*), une équation harmonique.*

Il résulte encore que, le système (13) étant complètement intégrable, on peut augmenter h ou k, ou ces deux fonctions en même temps, d'une constante arbitraire, sans que le système cesse d'être complètement intégrable.

Les conditions d'intégrabilité étant satisfaites, c'est-à-dire h et k ayant des expressions de la forme (14), le système (13) admet 4 solutions linéairement indépendantes. L'intégrale générale de ce système dépend en effet de 4 constantes arbitraires, les valeurs, pour $u = u_0$ et $v = v_0$, de x, x_u, x_v et d'une des dérivées x_{uu} ou x_{vv}. Nous déterminerons 4 solutions de (13) et nous vérifierons qu'elles satisfont à une équation quadratique.

Posons en effet

$$x = f(u+v)\, g(u-v)$$

et introduisons dans (13). On obtient aisément

$$(15)\quad f'' = \varphi f,\ g'' = \psi g$$

c'est-à-dire deux équations différentielles ordinaires et linéaires, pour déterminer les fonctions inconnues f et g. Soient A et A_1 deux solutions linéairement indépendantes de la première de ces équations (15) et B, B_1 deux solutions analogues de la seconde, alors

$$x^{(1)} = AB,\ x^{(2)} = AB_1,\ x^{(3)} = A_1B,\ x^{(4)} = A_1B_1$$

sont 4 solutions linéairement indépendantes de (13). Or, on a manifestement

$$x^{(1)}\, x^{(4)} = x^{(2)}\, x^{(3)},$$

donc le réseau (x) décrit par le point x de coordonnées $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ est quadratique.

Le système (13) définit non seulement le réseau (x) que nous venons d'obtenir mais aussi tout autre réseau qui s'en déduit par une transformation projective. On a ici un exemple particulier d'une méthode générale pour l'étude projective des configurations géométriques d'un espace E_{n-1} à l'aide d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles.

Digitized by Google

102. Le réseau quadratique et à invariants égaux (x) de E_3 étant défini par le système (13), appliquons-lui une transformation de Koenigs-Moutard (no. 85). Si R est une solution quelconque de la première équation (13), un des réseaux focaux (y) d'une congruence (xy), conjuguée à (x), est défini par

$$(16) \quad y_u = R_u x, \; y_v = R x_v .$$

Il faut remarquer cependant que, la solution R étant choisie, les $y^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ne sont définies qu'à des constantes additives près. Nous nous servirons plus loin du choix arbitraire de ces constantes.

Le transformé (x') de Koenigs-Moutard de (x) est alors donné (no. 85) par

$$x' = 2y - Rx$$

et ce réseau à invariants égaux est sur la même quadrique (7) que (x), si l'on a

$$\Sigma x'^2 \equiv 4\Sigma y^2 - 4R\Sigma xy = 0,$$

ou en posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$X = 2\Sigma xy, \; Y = \Sigma y^2,$$

si l'on a

$$(17) \quad 2Y - RX = 0;$$

c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau (x') satisfasse, comme (x), à l'équation (7).

Le problème qu'il s'agit de résoudre est le suivant: *choisir la solution* R *et les constantes additives des* $y^{(i)}$ *de manière que l'on ait la relation* (17).

A cet effet nous remarquerons en premier lieu (no. 96) que X et Y sont des solutions du système (16), c'est-à-dire que l'on a

$$(16') \quad Y_u = R_u X, \; Y_v = R X_v$$

et alors (17) donne

$$(18) \quad X = \frac{R}{m}, \; Y = \frac{1}{2m} R^2,$$

m étant une constante arbitraire.

En second lieu, on a successivement, en vertu de (16)

$$X_u = 2\Sigma y x_u, \; X_v = 2\Sigma y x_v, \; X_{uu} = 2\Sigma y x_{uu},$$
$$X_{uv} = 2\Sigma y x_{uv}, \; X_{vv} = 2\Sigma y x_{vv} - 2R,$$

d'où il résulte

$$X_{uv} = hX, \; X_{uu} + X_{vv} = kX - {}_2R.$$

Si l'on remplace X par sa valeur de (18), on trouve

$$(19) \quad R_{uv} = hR, \; R_{uu} + R_{vv} = (k - {}_2m)R.$$

Digitized by Google

On voit donc qu'*une condition nécessaire pour que le réseau* (x') *soit situé sur la même quadrique que* (x), *est que* R *soit une solution commune du système* (19). Nous allons voir que cette condition nécessaire n'est pas en général suffisante.

103. Nous savons (no. 101) que le système (19) est complètement intégrable, qu'il admet 4 solutions R', R'', R''', R^{IV} linéairement indépendantes, de plus que ces solutions vérifient une équation quadratique, ce qui donne un nouveau réseau quadratique à invariants égaux, dépendant d'une constante arbitraire m.

Partons d'abord de la solution R'. Le système (16) qui donne le réseau (y) devient

$$y'_u = R'_u x, \quad y'_v = R' x_v$$

et on a les coordonnées du point y' à des constantes additives près. L'expression

$$X' = 2\Sigma x y'$$

satisfait à

$$X'_{uv} = h X', \quad X'_{uu} + X'_{vv} = k X' - {}_2R'$$

et comme on a (19), il résulte que $X' - \frac{1}{m}R'$ satisfait au système (13), cette expression est donc une fonction linéaire à coefficients constants des $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. On peut choisir les constantes additives qui figurent dans les coordonnées de y' pour avoir

$$(20) \quad X' = \frac{1}{m} R'$$

L'expression $2Y' - R'X'$, où $Y' = \Sigma y'^2$, analogue à celle qui figure dans l'équation (17), est, en vertu de (16') et de (20), une constante c', qui en général est différente de zéro.

Par conséquent, *une solution quelconque* R' *du système* (19), *ne répond pas à la question.*

Prenons maintenant la solution générale

$$(21) \quad R = a' R' + a'' R'' + a''' R''' + a^{IV} R^{IV}$$

du système (19). Nous voulons démontrer que l'on peut choisir les constantes a', a'', a''', a^{IV} de manière que la solution R conduise à un réseau (x'), quadratique et à invariants égaux.

Nous supposons que l'on ait fait pour R'', R''' et R^{IV}, ce que nous avons fait plus haut pour R', c'est-à-dire que l'on a

$$X'' = \frac{1}{m} R'', \quad X''' = \frac{1}{m} R''', \quad X^{IV} = \frac{1}{m} R^{IV}$$

donc

$$2Y'' - R'X'' = c'', \text{ etc.}$$

Digitized by Google

Le système (16), où R a la valeur (21), admettra la solution

$$y = a' y' + a'' y'' + a''' y''' + a^{IV} y^{IV}$$

et on aura

$$X = 2\Sigma x y = a' X' + a'' X'' + a''' X''' + a^{IV} X^{IV} = \frac{1}{m} R.$$

En vertu de cette relation et du système (16'), on a

$$2Y - RX = c,$$

c étant une constante dépendant *effectivement* des constantes a', a'', a''', a^{IV}. En effet, si l'on prend

$$a'' = a''' = a^{IV} = 0,$$

on trouve

$$c = a'^2 c'.$$

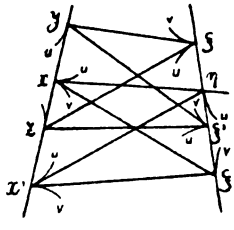
On peut donc choisir les constantes a', a'', a''', a^{IV} de manière qu'on ait $c = 0$.

En laissant de côté un facteur qui n'est pas essentiel pour la solution, on peut dire, par conséquent, qu'il y a ∞^2 solutions R qui répondent à la question. Comme d'autre part, on a dans le système (19) la constante arbitraire m, on voit que notre problème admet en tout ∞^3 solutions: *il y a ∞^3 congruences dont les développables découpent sur la quadrique Q_2 le réseau (x) à invariants égaux et telles que le conjugué harmonique x' de x par rapport aux foyers y et z du rayon xyz de la congruence soit aussi sur la quadrique.*

104. Nous avons résolu le problème fondamental que nous nous sommes posé au sujet des réseaux quadratiques et à invariants égaux, dans le cas où $n = 4$. Nous voulons montrer que, dans ce cas, du couple des réseaux (x) et (x'), quadratiques et à invariants égaux, nous pouvons déduire un autre couple de même espèce.

Considérons la droite $\xi\xi'$, conjuguée de xx' par rapport à la quadrique Q_2 et coupant cette surface en ξ et ξ'.

Il est clair que la droite $\xi\xi'$ décrit une congruence $(\xi\xi')$ dont les développables correspondent à celles de (xx'). Comme $\xi\xi'$ est l'intersection des plans tangents à Q_2 en x et x', les foyers η et ζ de $\xi\xi'$ se trouvent aux points communs des tangentes aux courbes v = const. et u = const. des réseaux (x) et (x'). On peut donc représenter cette situation géométrique par la figure suivante.



Digitized by Google

Cela étant, supposons $v = \text{const.}$ et cherchons la tangente à la courbe décrite par ξ. Elle se trouve d'abord dans le plan $\xi x x'$ tangent à Q_2 en ξ. Elle se trouve aussi dans le plan focal de $\xi\,\xi'$, tangent à la surface décrite par ξ ou osculateur à la courbe u décrite par η. Or ce plan osculateur est le plan conjugué de y par rapport à Q_2, il passe donc par le point z, conjugué harmonique de y par rapport à $x\,x'$. Ce plan est donc $z\,\xi\,\xi'$ et la tangente cherchée est ξz. On démontre de la même manière que $\xi\,y$ est la tangente en ξ à la courbe $u = \text{const.}$

Comme les deux droites $\xi\,x$ et $\xi\,x'$ sont les génératrices rectilignes de Q_2 passant par ξ, les deux tangentes $\xi\,y$ et $\xi\,z$ sont conjuguées et le point ξ décrit un réseau (ξ). Il en est de même de (ξ'). Or ξ et ξ' sont conjugués harmoniques par rapport au segment focal η, les réseaux (ξ) et (ξ'), tracés sur Q_2, sont par conséquent à invariants égaux.

On a donc le résultat suivant: *Chaque couple de réseaux à invariants égaux* (x) *et* (x'), *situés sur la quadrique* Q_2 *et liés par la transformation définie précédemment (Koenigs-Moutard convenablement choisie) donne encore un couple de réseaux à invariants égaux* (ξ) *et* (ξ') *de* Q_2, *liés par la même transformation.*

105. Le résultat géométrique précédent a une traduction analytique intéressante. Il montre qu'on peut passer de (x) à (x') par deux transformations simples, une qui mène de (x) à (ξ) et l'autre de (ξ) à (x'), ou bien, une qui mène de (x) à (ξ') et l'autre de (ξ') à (x').

Nous allons donner les formules qui expriment ces transformations. A cet effet, nous remarquerons que, ξ étant situé dans le plan tangent en x à Q_2, on a

$$\xi = A\,x + B x_u + C x_v,$$

A, B, C étant des fonctions que nous devons choisir de manière que les conditions du problème soient satisfaites.

Ecrivons d'abord que l'on a $\Sigma\,\xi^2 = o$, en tenant compte de (10'), on obtient

$$B^2 - C^2 = 0.$$

Nous prendrons $B - C = o$ et on aura $B + C = o$ pour le point ξ'.

Ecrivons ensuite que ξ vérifie une équation de la forme

$$\omega_{uv} = h_1\,\omega,$$

on trouve, en vertu de la première équation de (13)

$$[A\,h + A_{uv} + B\,(h_u + h_v) + (B_u + B_v)\,h]\,x + (A_v + B_{uv} + B\,h)\,x_u$$
$$+ (A_u + B_{uv} + B\,h)\,x_v + B_v\,x_{uu} + B_u\,x_{vv} = h_1\,(A\,x + B\,x_u + B\,x_v)$$

et cette équation doit être identique à la seconde équation de (13). On a donc

$$(22)\quad A_v + B_{uv} + B\,h = B\,h_1\,,\quad A_u + B_{uv} + B\,h = B\,h_1,$$

$$(23)\quad B_u = B_v,$$

$$(24)\quad A\,h_1 - Ah - A_{uv} - B\,(h_u + h_v) - (B_u + B_v)\,h = k\,B_u.$$

Digitized by Google

Les équations (22) donnent $A_u = A_v$, donc

$$A = f(u+v)$$

et de (23) on a

$$B = g(u+v)$$

et alors une des équations (22) donne

$$h_1 = \frac{f' + g''}{g} + \varphi - \psi,$$

car $h = \varphi(u+v) - \psi(u-v)$. En remplaçant ces valeurs dans (24), on obtient

$$f'' - \frac{f}{g}(f' + g'') + 2g\varphi' + 4g'\varphi = 4g'\psi.$$

Si nous supposons que $\psi(u-v)$ n'est pas constante, on a nécessairement $g' = 0$ et on pourra prendre $g = 1$, et la relation précédente se réduira à

$$(25) \quad f'' - ff' + 2\varphi' = 0$$

qui détermine la fonction inconnue f. On a donc

$$\xi = xf(u+v) + x_u + x_v,$$

$f(u+v)$ étant déterminée par (25) et l'on vérifie aisément qu'on a

$$\xi_{uv} = (f' + \varphi - \psi)\xi, \quad \xi_{uu} + \xi_{vv} = 2(f' + \varphi + \psi)\xi,$$

système tout pareil à (13). Enfin, il est facile de voir qu'on a

$$\xi_u + \xi_v - \xi f(u+v) = (2f' - f^2 + 4\varphi)x$$

où le coefficient de x est, en vertu de (25), une constante. Cette relation prouve que la même transformation, à l'aide de la fonction $-f(u+v)$, conduit de ξ à x.

Considérons maintenant le passage de (x) à (ξ'). On aura

$$\xi' = xf_1(u-v) + x_u - x_v,$$

f_1 étant déterminée par

$$f''_1 - f_1 f'_1 + 2\psi' = 0,$$

et ξ' vérifie le système

$$\xi'_{uv} = (\varphi - \psi - f'_1)\xi', \quad \xi'_{uu} + \xi'_{vv} = 2(\varphi + \psi + f'_1)\xi'.$$

En combinant les deux transformations, on a

$$x' = f_1\xi + \xi_u - \xi_v$$
$$= ff_1 x + (f + f_1)x_u + (f_1 - f)x_v + x_{uu} - x_{vv}.$$

Toutes ces transformations, qui se présentent ici comme conséquences des considérations géométriques précédentes, ont été données par M. Darboux (Tome II, p. 203) par une voie purement analytique, très élégante.

Digitized by Google

IV. TRANSFORMATIONS DE DARBOUX ET DE BIANCHI.

106. Nous venons de faire connaître une méthode qui permet de passer d'un réseau quadratique et à invariants égaux (x) à un autre réseau de même nature (x'), pour le cas $n = 4$; elle repose sur le système (13), qui définit le réseau (x) à une transformation projective près. On peut appliquer la même méthode aux cas $n = 5$ et $n = 6$, mais elle devient de plus en plus pénible, parceque le système analogue à (13) devient de plus en plus compliqué.

Aussi, pour attaquer le cas général nous changerons de méthode. Comme ce problème, de la transformation des réseaux quadratiques et à invariants égaux, se réduit pour $n = 5$ à la transformation des surfaces isothermiques, étudiée pour la première fois par M. *Darboux* (Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1899), nous dirons, dans le cas général que c'est une *transformation de Darboux.*

107. Nous étudierons d'abord les éléments analytiques qui définissent un réseau quadratique à invariants égaux (x), pour lequel on a donc

$$(26) \quad \Sigma x^2 = 0, \quad x_{uv} = h x,$$

et d'où l'on tire

$$\Sigma x x_u = 0, \quad \Sigma x x_v = 0, \quad \Sigma x_u x_v = 0.$$

Comme on a

$$\frac{\delta}{\delta v} \Sigma x_u^2 = 2 \Sigma x_u x_{uv} = 2h \Sigma x x_u = 0$$

et, de la même manière

$$\frac{\delta}{\delta u} \Sigma x_v^2 = 0,$$

on déduit

$$\Sigma x_u^2 = f(u), \quad \Sigma x_v^2 = \varphi(v).$$

Je laisse de côté les cas où l'une ou les deux fonctions $f(u)$ et $\varphi(v)$ seraient nulles et qui ne seraient pas dépourvus d'intérêt. Alors, on peut, par un changement des variables u et v qui ne change pas les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ du réseau, réduire les relations précédentes à

$$\Sigma x_u^2 = 1, \quad \Sigma x_v^2 = 1.$$

Cela étant, posons

$$(27) \quad x_u^{(i)} = X_1^{(i)}, \quad x_v^{(i)} = X_2^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les points X_1 et X_2 vérifient les relations

$$\Sigma X_1^2 = 1, \quad \Sigma X_2^2 = 1, \quad \Sigma X_1 X_2 = 0,$$

Digitized by Google

dont la dernière exprime qu'ils sont conjugués par rapport à l'espace quadratique sur lequel est tracé le réseau (x).

Considérons $n-2$ autres points, variables avec u et v, et constituant avec X_1 et X_2 un n-ièdre conjugué de l'espace $\Sigma x^2 = 0$. On pourra supposer qu'on a

$$(28) \quad \Sigma X_k^2 = 1, \ \Sigma X_k X_l = 0, \ l \neq k, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1^1 & X_1^2 & \ldots & X_1^n \\ X_2^1 & X_2^2 & \ldots & X_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n^1 & X_n^2 & \ldots & X_n^n \end{vmatrix}$$

— où, pour simplifier l'écriture, nous avons supprimé les paranthèses des indices supérieurs, — est donc orthogonal.

On a alors par colonnes

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i^k)^2 = 1, \ \sum_{i=1}^{i=n} X_i^k \ X_i^l = 0, \ l \neq k, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Il est clair que l'on peut déterminer n^2 coefficients p_{kl} $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ et n^2 coefficients q_{kl} $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$, de manière que les n^2 fonctions $X_k^{(i)}$ vérifient le système linéaire et homogène suivant[1])

$$(29) \quad \frac{\delta X_k}{\delta u} = \sum_{l=1}^{l=n} p_{kl} X_l, \ \frac{\delta X_k}{\delta v} = \sum_{l=1}^{l=n} q_{kl} X_l.$$

On en tire en effet

$$p_{kl} = \sum_{i=1}^{i=n} X_l^i \frac{\delta X_k^i}{\delta u}, \quad q_{kl} = \sum_{i=1}^{i=n} X_l^i \frac{\delta X_k^i}{\delta v},$$

d'où, à l'aide de (28),

$$p_{kk} = 0, \ q_{kk} = 0; \ p_{kl} + p_{lk} = 0, \ q_{kl} + q_{lk} = 0.$$

Le déterminant Δ étant différent de zéro, on peut poser

$$x^i = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k X_k^i, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

ou, plus simplement

$$(30) \quad x = \Sigma \lambda_k X_k.$$

Comme on a, à l'aide de (27)

$$\Sigma x x_u = \Sigma x X_1 = 0, \ \Sigma x x_v = \Sigma x X_2 = 0,$$

[1]) Voir *Guichard*: Sur les systèmes orthogonaux etc. (Annales de l'École Normale Supérieure, 1898, p. 499).

Digitized by Google

il en résulte

$$\sum_i \lambda_k X_1 X_k = 0, \quad \sum_i \lambda_k X_2 X_k = 0,$$

donc

$$(31) \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0;$$

enfin de $\Sigma x^2 = 0$ on tire

$$(32) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k^2 = 0.$$

Introduisons maintenant la valeur (30) de x dans les relations (27) en tenant compte de (29). On trouvera des relations de la forme

$$\Sigma A_k X_k = 0, \ \Sigma B_k X_k = 0,$$

qui donnent, les points X_k étant linéairement indépendants, $A_k = 0$, $B_k = 0$. On obtient ainsi les relations suivantes

$$(33) \quad \begin{cases} \dfrac{\delta \lambda_l}{\delta u} + \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k p_{kl} = \varepsilon_l, \ l = 1, 2, \ldots, n, \ \varepsilon_1 = 1, \ \varepsilon_l = 0 \ (l = 2, \ldots, n) \\ \dfrac{\delta \lambda_l}{\delta v} + \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k q_{kl} = \eta_l, \ l = 1, 2, \ldots, n, \ \eta_2 = 1, \ \eta_l = 0 \ (l = 1, 3, 4, \ldots, n) \end{cases}$$

On a encore

$$x_{uv} = \frac{\delta X_1}{\delta v} = \frac{\delta X_2}{\delta u} = h x,$$

ce qui donne

$$\Sigma q_{1l} X_l = \Sigma p_{2l} X_l = h \Sigma \lambda_l X_l,$$

d'où l'on tire

$$(34) \quad q_{1l} = p_{2l} = h \lambda_l, \ l = 1, 2, \ldots, n,$$

en particulier, en vertu de (31),

$$q_{11} = p_{21} = q_{12} = p_{22} = 0.$$

Il faut enfin ajouter les conditions d'intégrabilité du système (29), à savoir

$$(35) \quad \frac{\delta p_{kl}}{\delta v} + \sum_{j=1}^{j=n} p_{kj} q_{jl} = \frac{\delta q_{kl}}{\delta u} + \sum_{j=k}^{j=1} q_{kj} p_{jl},$$

qui sont les mêmes pour le système (33).

Il est aisé de se rendre compte que l'on a trouvé ainsi toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour définir d'abord les points X_k, ensuite le réseau (x) quadratique et à invariants égaux.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour aborder la transformation de *Darboux*.

Digitized by Google

108. *Transformation de Darboux.* Il s'agit de chercher parmi les transformations de Koenigs-Moutard du réseau (x), quadratique et à invariants égaux, celles qui donnent des réseaux quadratiques (x').

Considérons tout d'abord une congruence (xy), conjuguée au réseau quadratique et à invariants égaux (x) défini par la relation (30), le réseau focal (y) étant déterminé par

$$(36) \quad y_u = \mathrm{R}_u x, \quad y_v = \mathrm{R}\, x_v,$$

où R est une solution de la seconde équation (26), c'est-à-dire

$$(37) \quad \mathrm{R}_{uv} = h\,\mathrm{R}.$$

Le réseau à invariants égaux (x'), obtenu de (x) par une transformation de Koenigs-Moutard, est alors déterminé par (voir no. 85)

$$x' = 2y - \mathrm{R}\, x.$$

Pour que (x') soit tracé sur le même espace quadratique que (x), on doit avoir

$$\Sigma x'^2 = 4\Sigma y^2 - 4\,\mathrm{R}\,\Sigma x y = 0$$

ou, en posant

$$\mathrm{Y} = \Sigma y^2, \quad \mathrm{X} = 2\Sigma x y,$$

la relation

$$(38) \quad 2\,\mathrm{Y} - \mathrm{R}\,\mathrm{X} = 0.$$

Or, on vérifie aisément que X et Y satisfont au système (36). La relation (38) donne alors

$$(39) \quad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{R}}{m}, \quad 2\,\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{R}^2}{m}, \quad m = \text{const.}$$

Réciproquement, si ces égalités ont lieu, on a (38), donc

$$\Sigma x'^2 = 0.$$

Toute la difficulté du problème est réduite à ceci: *Trouver une solution* R *de* (37) *et les solutions correspondantes* $x^{(i)}$ *et* $y^{(i)}$ *de* (36), *de manière que l'on ait la relation* (38), *ou, ce qui est la même chose, les relations* (39).

109. Cela étant, on peut évidemment poser

$$(40) \quad y^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k \, \mathrm{X}_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

où il s'agit de déterminer les fonctions μ_k de manière à avoir les relations (36) et (39). Or, en tenant compte de (30), on a

$$\mathrm{Y} = \Sigma y^2 = \Sigma \mu^2{}_k = \mathrm{M}, \quad \mathrm{X} = 2\Sigma x y = 2\Sigma \lambda_k \mu_k = \mathrm{L}$$

et le système (39) devient

$$(41) \quad \mathrm{R} - m\,\mathrm{L} = 0, \quad 2\,\mathrm{M} = \frac{1}{m}\,\mathrm{R}^2.$$

Digitized by Google

Ecrivons enfin que y défini par (40) satisfait à (30'); en tenant compte de (30) et de (29), on obtient des relations linéaires et homogènes en X_k^i qui doivent être des identités. On a ainsi

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta \mu_l}{\delta u} + \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k p_{kl} = R_u \lambda_l, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\delta \mu_i}{\delta v} + \Sigma \mu_k q_{kl} = \omega_l . R, \quad (\omega_2 = 1, \omega_l = 0, l = 1, 3, \ldots, n), \; l = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Pour avoir une transformation de Darboux il faudra donc déterminer les fonctions R *et* μ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) *de manière que l'on ait les relations* (41) *et* (42).

110. *Etude analytique de la transformation de Darboux.* Si les fonctions R, $\mu_1 \mu_2, \ldots, \mu_n$ satisfont à (42), on a

$$L_u = 2 \frac{\delta}{\delta u} \Sigma \lambda_l \mu_l = 2 \sum_l \lambda_l (R_u \lambda_l - \sum_k \mu_k p_{kl}) + 2 \Sigma \mu_l (\varepsilon_l - \sum_k \lambda_k p_{kl})$$

qui devient, à l'aide de $p_{ll} = 0$ et (32),

$$L_u = 2 \mu_1$$

et on obtient de la même manière

$$L_v = 2 \mu_2.$$

Comme on a

$$R = m L,$$

il en résulte

$$(43)\quad R_u = 2 m \mu_1, \quad R_v = 2 m \mu_2,$$

d'où il est facile, à l'aide de (34), de tirer la relation (37).

On a donc le résultat suivant: *Pour que le réseau* (x') *soit quadratique, il faut — mais il ne suffit pas — que les fonctions* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$, R *vérifient le système* (S), *formé par les équations* (42) *et* (43).

111. Il faudra donc étudier en premier lieu le système (S) et choisir ensuite parmi ses solutions celles qui satisfont aux relations (41).

Or, le système (S), du premier ordre, linéaire et homogène par rapport aux fonctions inconnues $\mu_1 \mu_2, \ldots, \mu_n$ et R, admet $n + 1$ solutions linéairement indépendantes $\mu^i_1, \mu^i_2, \ldots, \mu^i_n$, R^i ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$).

On vérifie aisément que ces solutions satisfont aux relations

$$R^i - m L^i = a^i = \text{const.} \quad (i = 1, 2, \ldots, n + 1),$$

où

$$L^i = 2 \Sigma \lambda_k \mu^i_k.$$

Si une solution $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, R de (S) satisfait à la relation

$$R - m L = 0,$$

nous dirons qu'elle est *principale.*

Digitized by Google

Une solution principale étant évidemment une combinaison linéaire des $n+1$ solutions $\mu^i_1, \mu^i_2, \ldots, \mu^i_n, \mathrm{R}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, on peut poser

$$\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{i=n+1} b^i \mathrm{R}^i, \quad \mu_l = \sum_{i=1}^{i=n+1} b^i \mu^i_l, \quad (l = 1, 2, \ldots, n), \quad b^i = \text{const.}$$

On a alors

$$\mathrm{R} - m\,\mathrm{L}_\xi = \Sigma\, a^i\, b^i = c = \text{const.}$$

On peut choisir d'une infinité de manières les constantes b^i de manière que l'on ait $c = 0$.

On voit ainsi que, *sauf le cas où toutes les intégrales de* (S) *sont principales, le système* (S) *admet toujours n solutions principales linéairement indépendantes.*

112. Ce résultat étant acquis, je suppose que les n solutions $\mu^i_1, \mu^i_2, \ldots, \mu^i_n, \mathrm{R}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soient principales; on a donc

$$\mathrm{R}^i - m\,\mathrm{L}^i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Il s'agit actuellement de choisir parmi les combinaisons linéaires des n solutions principales, qui sont elles-mêmes des solutions principales de (S), celles qui satisfont à la deuxième relation (41).

Introduisons d'abord la notation suivante

$$\mathrm{M}^{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \mu^i_k \mu^j_k, \quad i, j, = 1, 2 \ldots, n.$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$2\,\mathrm{M}^{ij}{}_u = \mathrm{R}^i{}_u\,\mathrm{L}^i + \mathrm{R}^i{}_u\,\mathrm{L}^j = \frac{1}{m}(\mathrm{R}^i\,\mathrm{R}^j)_u,$$

$$2\,\mathrm{M}^{ij}{}_v = \frac{1}{m}(\mathrm{R}^i\,\mathrm{R}^j)_v,$$

donc

$$\mathrm{M}^{ij} = \frac{1}{2m}\,\mathrm{R}^i\,\mathrm{R}^j + a_{ij}, \quad a_{ij} = \text{const.}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Considérons maintenant la combinaison linéaire suivante des n solutions principales

$$(44) \quad \mu_l = \sum_{i=1}^{i=n} a^i \mu^i_l, \quad \mathrm{R} = \sum_{i=1}^{i=n} a^i \mathrm{R}^i, \quad a^i = \text{const.}, \quad l = 1, 2, \ldots, n.$$

On a alors

$$\mathrm{M} = \sum_{l=1}^{l=n} \mu_l{}^2 = \sum_{i,j,l} \mu^i_l \mu^j_l a^i a^j = \sum_{i,j} \mathrm{M}^{ij} a^i a^j = \frac{1}{2m} \Sigma\, \mathrm{R}^i \mathrm{R}^j a^i a^j + \Sigma\, a_{ij} a^i a^j$$

$$= \frac{1}{2m}\,\mathrm{R}^2 + \sum_{i,j} a_{ij}\, a^i a^j.$$

Digitized by Google

Si nous choisissons les constantes a de manière que l'on ait

$$(45)\quad \sum_{i,j} a_{ij}\, a^i a^j = 0,$$

ce qui peut se faire d'une infinité de manières, on a

$$2\,M = \frac{1}{m}\,R^2,$$

et alors le système (S) est vérifié en même temps que les relations (41), et la transformation de Darboux, sous sa forme la plus générale, est complètement définie. En effet, il suffira d'introduire les valeurs (44) de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — les constantes a^i vérifiant (45) — dans (40), pour avoir les coordonnées du point focal y de la congruence (xy), le réseau transformé (x') sera alors

$$x' = 2\,y - R\,x,$$

R étant défini aussi par (44). Le problème est ainsi, dans les conditions où nous nous sommes placés, complètement résolu.

113. *Transformation de Bianchi.* En relation étroite avec la transformation précédente de Darboux, il y a une autre transformation remarquable des réseaux quadratiques à invariants égaux, *la transformation de Bianchi.*

Le mécanisme analytique qui a donné la transformation de Darboux, donne en même temps la transformation de Bianchi.

Posons

$$R = 2\,m\,z, \quad \mu_k = Z_k + m\,z\,\lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

z et Z_k étant les variables qui remplacent R et μ_k. Le système (S) devient alors, en tenant compte de (33),

$$z_u = Z_1,\ \frac{\delta Z_1}{\delta u} + \sum Z_k\, p_{k1} + m\,z = 0,\ \frac{\delta Z_2}{\delta u} + \sum Z_k\, p_{k2} = 0,\ \frac{\delta Z_l}{\delta u} + \sum Z_k\, p_{kl} = m\,Z_1\,\lambda_l;$$

$$z_v = Z_2,\ \frac{\delta Z_1}{\delta v} + \sum Z_k\, q_{k1} = 0, \qquad \frac{\delta Z_2}{\delta v} + \sum Z_k q_{k2} = m\,z,\ \frac{\delta Z_k}{\delta v} + m\,Z_2\,\lambda_l + \sum_{k=2}^{k=n} Z_k\, q_{kl} = 0.$$

Or, on a

$$\sum \lambda_k\,\mu_k = \frac{1}{2}\,L = \frac{R}{2m} = z = \sum \lambda_k\, Z_k,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, R étant une solution principale de (S). On peut donc écrire le système précédent sous la forme

$$(46)\quad \begin{aligned} z_u &= Z_1, & \frac{\delta Z_k}{\delta u} &= \sum r_{kl}\, Z_l, \\ z_v &= Z_2, & \frac{\delta Z_k}{\delta v} &= \sum s_{kl}\, Z_l, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Digitized by Google

ou

$$r_{1k} = p_{1k} - m\lambda_k, \quad r_{2k} = p_{2k}, \qquad r_{i1} = p_{i1} + m\lambda_i, \quad r_{ik} = p_{ik};$$
$$s_{1k} = q_{1k}, \qquad s_{2k} = q_{2k} + m\lambda_k, \; s_{i2} = q_{i2} - m\lambda_i, \quad s_{ik} = q_{ik}.$$

Le système (46) est tout à fait semblable au système formé par (27) et (29) et il définit comme celui-là un réseau (z) quadratique et à invariants égaux. On constate aisément que les fonctions r_{ik} et s_{ik} vérifient les mêmes relations que p_{ik} et q_{ik}. L'existence du réseau (z) est ainsi prouvée et la transformation de Bianchi est définie.

113 bis. *Théorème de permutabilité.* On a pour la transformation de Darboux des réseaux quadratiques à invariants égaux un théorème de permutabilité analogue à celui que l'on a pour les réseaux quadratiques généraux (no. 97 bis et suiv.), ou plutôt pour les réseaux à invariants égaux (no. 90 et suiv.). Ce théorème, dans le cas des surfaces isothermiques, a été donné pour la première fois, sous une forme différente, par M. *Bianchi.*

Soit donc (x) un réseau quadratique à invariants égaux, (x') et (x'') deux transformés de Darboux de ce réseau.

Si

$$x_{uv} = hx$$

est l'équation qui correspond à (x) et R′ et R″ les solutions de cette même équation qui définissent (x') et (x'') à l'aide (no. 93) de

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (x' + x)_u = \dfrac{R'_u}{R'}(x - x'), \quad (x' - x)_v = -\dfrac{R'_v}{R'}(x + x'); \\ (x'' + x)_u = \dfrac{R''_u}{R''}(x - x''), \quad (x'' - x)_v = -\dfrac{R''_v}{R''}(x + x''), \end{cases}$$

alors les réseaux à invariants égaux (x') et (x''), supposés quadratiques, sont les transformés de Koenigs-Moutard de ∞^1 réseaux $(\bar{x})$, où (no. 93)

$$\bar{x} = x + \theta(x'' - x')$$

avec

$$\theta = -\frac{R''}{\varrho'},$$

ϱ' étant une solution du système

$$\text{(II)} \quad (R'\varrho')_u = R'^2\left(\frac{R''}{R'}\right)_u, \quad (R'\varrho')_v = -R'^2\left(\frac{R''}{R'}\right)_v.$$

Or, je dis que parmi ces ∞^1 réseaux $(\bar{x})$ il y en a un qui est quadratique et c'est en cela que consiste le théorème de permutabilité.

A cet effet, remarquons d'abord que l'on déduit de (I)

$$A = \Sigma x x' = \text{const.}, \quad B = \Sigma x x'' = \text{const.}$$

Digitized by Google

et en posant $C = \Sigma x' x''$

$$(III)\quad \begin{cases} C_u = \dfrac{R'_u}{R'}(B - C - A) + \dfrac{R''_u}{R''}(A - C - B), \\ C_v = \dfrac{R'_v}{R'}(A - C - B) + \dfrac{R''_v}{R''}(B - C - A). \end{cases}$$

Cela étant, si l'on écrit que $\Sigma \bar{x}^2 = 0$, on trouve

$$\theta = \frac{B - A}{C} = -\frac{R''}{\varrho'}$$

d'où

$$R' \varrho' = -\frac{R' R''}{B - A} C.$$

Si l'on écrit maintenant que cette expression de $R'\varrho'$ satisfait au système (II), on trouve le système (III). Le théorème de permutabilité est ainsi démontré. On a de plus

$$\bar{x} = C x + (B - A)(x'' - x').$$

On peut tirer de là un résultat qui n'est pas dépourvu d'intérêt. Remarquons tout d'abord qu'un point de la section de la variété quadratique $\Sigma X^2 = 0$ par le plan $xx'x''$ est donné par

$$\xi = (B + t C) x + t (B + t C) x' - A t x''.$$

On a x pour $t = t_1 = 0$, x'; pour $t = t_2 = \infty$, x''; pour $t = t_3 = -\dfrac{B}{C}$ et $\bar{x}$ pour $t = t_4 = \dfrac{A - B}{C}$.

Donc le rapport anharmonique de ces 4 points $(x x' x'' \bar{x}) = (t_1 t_2 t_3 t_4) = -\dfrac{B}{A - B}$ = const.

Digitized by Google

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE V.

SUITES DE LAPLACE.

I. DÉFINITION ET REPRÉSENTATION.

114. Etant donné un réseau (x), appartenant à l'espace projectif E_{n-1}, on peut en déduire, par l'application successive de la transformation de Laplace (no. 66), dans le sens des courbes u et dans le sens des courbes v, une suite, en général indéfinie dans les deux sens, de réseaux que nous appellerons, dans sa totalité, *une suite de Laplace.*

Cette configuration géométrique peut être définie en partant d'un réseau quelconque de la suite; mais, d'habitude, pour conduire les calculs, on fixe un réseau que l'on considère comme *réseau initial* et à partir duquel on déduit toute la suite.

Nous supposerons d'abord que la suite de Laplace ne finit dans aucun sens et qu'elle ne se compose pas d'un nombre fini de réseaux. Nous ferons plus loin une étude spéciale de ces cas particuliers remarquables. Nous étudierons par conséquent en premier lieu les suites générales ou plutôt les propriétés générales des suites de Laplace.

115. *Représentation analytique.* Pour l'étude des suites de Laplace nous avons besoin d'une représentation analytique appropriée.

Le réseau (x) vérifie d'abord l'équation de Laplace correspondante

$$(1) \quad x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0,$$

mais il n'est pas défini par elle: n solutions quelconques, linéairement indépendantes, déterminent un réseau de E_{n-1}.

Remarquons maintenant que, en considérant la suite de Laplace déduite du réseau (x), suite que nous noterons par $[x]$, entre $n+1$ points consécutifs parmi les points

$$\ldots x_{-p},\ x_{-p+1}, \ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_q,\ x_{q+1}, \ldots$$

qui décrivent les différents réseaux de la suite $[x]$, il y a une relation linéaire.

Digitized by Google

Cette relation est en réalité une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène, par rapport à x.

On a ainsi une infinité d'équations aux dérivées partielles vérifiées par le réseau (x). Considérons-en une, celle qui relie x, x_1, ..., x_n par exemple,

$$(2) \quad x_n + a_{n-1}\, x_{n-1} + \ldots + a_1\, x_1 + a\, x = 0,$$

où les a sont des fonctions de u et v.

En dérivant (2) par rapport à v et en éliminant x, on obtient la relation qui existe entre x_1, x_2, ..., x_{n+1} ; si on avait dérivé par rapport à u, on aurait trouvé celle qui existe entre x_{-1}, x, ..., x_{n-1} et ainsi de suite. On obtient ainsi, de proche en proche, toutes les relations linéaires dont nous venons de parler et qui relient entre eux les réseaux successifs de la suite $[x]$. Les coefficients a, a_1, ..., a_{n-1} de (2) ne sont pas arbitraires. En effet, nous venons de montrer que l'on peut tirer de (2) une relation linéaire entre x_1, x_2, ..., x_{n+1}. En dérivant celle-ci par rapport à u et en éliminant x_{n+1}, on en déduira une relation entre x, x_1, ..., x_n. Cette dernière doit être identique à (2), autrement on en tirerait une relation linéaire entre x, x_1, ..., x_{n-1} et le réseau (x) serait contenu dans un E_{n-2}, ce qui est contraire à notre hypothèse. C'est de cette identité que l'on obtiendra les relations que doivent vérifier a, a_1, ..., a_{n-1}.

Le système formé par les équations (1) et (2) peut être remplacé par un autre d'ordre minimum.

Si $n = 2p - 1$, parmi les relations linéaires entre les réseaux de la suite il y en a deux d'ordre minimum, celle entre les points

$$x_{-p},\ x_{-p+1},\ \ldots,\ x,\ x_1,\ \ldots.,\ x_{p-1}$$

et celle entre les points

$$x_{-p+1},\ x_{-p+2},\ \ldots,\ x,\ x_1,\ \ldots.,\ x_p$$

On a ainsi deux équations aux dérivées partielles de l'ordre p, qui forment avec (1) un système complètement intégrable, dont l'intégrale générale dépend de n constantes arbitraire.

Si $n = 2p$, on a une seule relation d'ordre minimum, à savoir celle qui existe entre les points

$$x_{-p},\ x_{-p+1},\ \ldots,\ x_{-1},\ x,\ x_1,\ \ldots,\ x_p.$$

On a, dans ce cas, une seule équation aux dérivées partielles d'ordre p, qui forme avec (1) un système complètement intégrable, dont l'intégrale générale, dépend, comme dans le cas précédent, de n constantes arbitraires.

Dans tous les cas le système (1) et (2) admet n intégrales linéairement indépendantes qui définissent le réseau (x) et par conséquent la suite $[x]$. En prenant n autres solutions linéairement indépendantes, on obtient un autre réseau $(\bar{x})$, qui se déduit de (x) par une transformation projective.

Digitized by Google

On peut dire que *le système* (1) *et* (2) *définit le réseau* (x) *à une transformation projective près*, ou encore que *ce système définit projectivement le réseau* (x).

II. SUITES DE LAPLACE INSCRITES DANS UNE SUITE DONNÉE.

116. Considérons un réseau (y) conjugué à la congruence (xx_{-1}) de la suite $[x]$. On a (no. 76)

$$y = \mathrm{R}\, x_{-1} - \mathrm{R}_{-1}\, x,$$

R étant une solution de l'équation de Laplace (1), qui correspond au réseau initial (x), R_{-1} sa transformée de Laplace dans le sens de la variable u.

D'une manière générale, le point

$$y_p = \mathrm{R}_p\, x_{p-1} - \mathrm{R}_{p-1}\, x_p$$

décrit un réseau (y_p) conjugué à la congruence $(x_{p-1}\, x_p)$.

Je dis que tous les réseaux (y_p) forment une suite de Laplace $[y]$. A cet effet, il suffit de prouver que la droite $y_p y_{p+1}$ décrit une congruence dont les réseaux focaux sont (y_p) et (y_{p+1}). Nous supposerons, pour fixer les idées, $p > o$. Or, x_p satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\delta^2 x_p}{\delta u \delta v} + a_p \frac{\delta x_p}{\delta u} + b_p \frac{\delta x_p}{\delta v} + c_p x_p = 0, \quad b_p = b$$

et on a

$$x_{p+1} = \frac{\delta x_p}{\delta v} + a_p x_p,$$

d'où l'on tire d'abord

$$\frac{\delta x_p}{\delta v} = x_{p+1} - a_p x_p.$$

On a de la même relation

$$\begin{aligned} \frac{\delta x_{p+1}}{\delta u} &= \frac{\delta^2 x_p}{\delta u \delta v} + a_p \frac{\delta x_p}{\delta u} + \frac{\delta a_p}{\delta u} x_p \\ &= -b_p x_{p+1} + \left(\frac{\delta a_p}{\delta u} + a_p b_p - c_p \right) x_p \\ &= -b_p x_{p+1} + h_p x_p. \end{aligned}$$

A l'aide de ces relations on obtient les relations suivantes

$$\frac{\delta y_p}{\delta v} = \left(a_p - a_{p-1} + \frac{\mathrm{R}_{p+1}}{\mathrm{R}_p} \right) y_p + \frac{\mathrm{R}_{p-1}}{\mathrm{R}_p} y_{p+1},$$

$$\frac{\delta y_{p+1}}{\delta u} = \left(h_{p-1} \frac{\mathrm{R}_{p-1}}{\mathrm{R}_p} - 2b \right) y_{p+1} + h_{p-1} \frac{\mathrm{R}_{p+1}}{\mathrm{R}_p} y_p$$

qui prouvent bien (no. 68) que y_p et y_{p+1} décrivent des réseaux, dont (y_{p+1}) est le transformé de Laplace de (y_p) dans le sens de la courbe v. Il est nécessaire de remarquer que les coordonnées $y_{p+1}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de y_{p+1} ne sont pas, en gé-

Digitized by Google

néral, les transformées de Laplace de $y_p^{(i)}$, mais elles s'en déduisent en les multipliant par un même facteur.

Il résulte de la démonstration précédente que les points

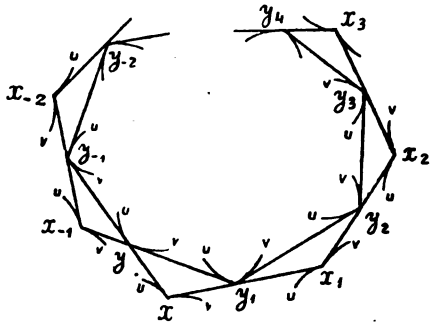
$$y_{-p},\quad y_{-p+1},\quad \ldots,\quad y_{-1},\quad y,\quad y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_q,\quad \ldots$$

décrivent les réseaux d'une suite de Laplace $[y]$ *inscrite* dans la suite donnée $[x]$.

On a donc le résultat suivant:

A chaque solution R *de* (1) *on peut faire correspondre une suite* $[y]$ *inscrite dans la suite* $[x]$.

On peut représenter la situation géométrique des suites $[x]$ et $[y]$ par la figure suivante



117. Parmi les solutions R, que l'on peut prendre pour construire une suite $[y]$ inscrite dans $[x]$, il y a une classe singulière, à savoir les combinaisons linéaires des coordonnées $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ du point x, c'est-à-dire

$$\mathrm{R} = \Sigma a x, \quad a^{(i)} = \text{const.}$$

On a dans ce cas manifestement

$$\mathrm{R}_p = \Sigma\, a\, x_p,$$

donc

$$\Sigma\, a\, y = \mathrm{R}\,\Sigma\, a\, x_{-1} - \mathrm{R}_{-1}\,\Sigma\, a\, x = \mathrm{R}\,\mathrm{R}_{-1} - \mathrm{R}_{-1}\,\mathrm{R} = 0$$

et de la même manière

$$\Sigma\, a\, y_p = 0,$$

ce qui prouve que tous les points y_p, qui décrivent les réseaux de la suite $[y]$ sont situés dans l'espace linéaire L_{n-1} (hyperplan de l'espace ambiant)

$$\Sigma\, a\, \mathrm{X} = 0.$$

Comme le point y_p est commun à la droite $x_{p-1}\, x_p$ et à cet espace linéaire, on peut énoncer le résultat précédent sous la forme:

L'intersection d'une suite de Laplace par un hyperplan est une suite inscrite dans la suite donnée.

III. SUITES DÉRIVÉES.

118. Nous dirons que la suite $[y]$, inscrite dans la suite $[x]$, est une *suite dérivée du premier ordre de* $[x]$.

Digitized by Google

Une suite dérivée du premier ordre de $[y]$ sera dite *suite dérivée du second ordre de* $[x]$. On peut définir ainsi, de proche en proche, les suites dérivées de différents ordres de $[x]$.

119. Considérons deux suites $[y]$ et $[y']$, dérivées du premier ordre de $[x]$ et déduites, la première à l'aide de la solution R, la seconde à l'aide de la solution R′ de (1).

Les droites $y_{p-1}\ y_p$ et $y'_{p-1}\ y'_p$ se coupent en un point z_p. Comme les congruences $(y_{p-1}\ y_p)$ et $(y'_{p-1}\ y'_p)$ sont harmoniques au même réseau (x_{p-1}), le point z_p décrit (no. 77) un réseau (z_p), conjugué à ces deux congruences. Le transformé de Laplace z_{p+1} de z_p, dans le sens de la courbe v, est situé (no. 74) en même temps sur $y_p\ y_{p+1}$ et $y'_p\ y'_{p+1}$.

Les réseaux (z_p) forment donc une suite de Laplace $[z]$, dérivée du second ordre de $[x]$.

Nous voulons trouver maintenant l'expression de z_p. A cet effet nous remarquons que l'on a

$$y_{p-1} = \begin{vmatrix} x_{p-2} & x_{p-1} \\ \mathrm{R}_{p-2} & \mathrm{R}_{p-1} \end{vmatrix}, \quad y_p = \begin{vmatrix} x_{p-1} & x_p \\ \mathrm{R}_{p-1} & \mathrm{R}_p \end{vmatrix}$$

et

$$y'_{p-1} = \begin{vmatrix} x_{p-2} & x_{p-1} \\ \mathrm{R}'_{p-2} & \mathrm{R}'_{p-1} \end{vmatrix}, \quad y'_p = \begin{vmatrix} x_{p-1} & x_p \\ \mathrm{R}'_{p-1} & \mathrm{R}'_p \end{vmatrix}$$

et que le point commun à y_{p-1}, y_p et $y'_{p-1}\ y'_p$ a une expression de la forme

$$z_p = \alpha\, x_{p-2} + \beta\, x_{p-1} + \gamma\, x_p \equiv \lambda y_{p-1} + \mu\, y_p \equiv \lambda'\, y'_{p-1} + \mu'\, y'_p.$$

Or pour $x = \mathrm{R}$ et $x = \mathrm{R}'$ on a $z_p = 0$, donc, sauf un facteur

$$z_p = \begin{vmatrix} x_{p-2} & x_{p-1} & x_p \\ \mathrm{R}_{p-2} & \mathrm{R}_{p-1} & \mathrm{R}_p \\ \mathrm{R}'_{p-2} & \mathrm{R}'_{p-1} & \mathrm{R}'_p \end{vmatrix}.$$

On démontre ainsi aisément, de proche en proche, que les points

$$t_p = \begin{vmatrix} x_p & x_{p+1} & \cdots & x_{p+q} \\ \mathrm{R}'_p & \mathrm{R}'_{p+1} & \cdots & \mathrm{R}'_{p+q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{R}_p^{(q)} & \mathrm{R}_{p+1}^{(q)} & & \mathrm{R}_{p+q}^{(q)} \end{vmatrix}$$

— p prenant toutes les valeurs entières positives et négatives, q restant fixe et R′, R″, ..., R^q étant des solutions linéairement indépendantes de (1), — décrivent des réseaux (t_p) formant une suite $[t]$ dérivée d'ordre q de $[x]$.

Digitized by Google

Ces expressions sont au fond celles qu'a introduites M. *Darboux*, par la voie analytique, sous la notation (m, n)[1]).

IV. SUITES CIRCONSCRITES À UNE SUITE DONNÉE.

120. S'il existe une suite de Laplace $[y]$, dans laquelle la suite donnée $[x]$ soit inscrite, nous dirons que $[y]$ est circonscrite à $[x]$.

Le point x étant situé sur la droite $y_{-1}\,y$, le réseau (x) est conjugué à la congruence $(y_{-1}\,y)$ et réciproquement. On peut donc prendre (no. 78)

$$y_u = (R_u - b\,R)\,x, \quad y_v = R\,(x_v + a\,x),$$

R étant une solution de l'équation

$$R_{uv} - (a\,R)_u - (b\,R)_v + c\,R = 0,$$

adjointe de (1).

Les relations qui donnent y prouvent que yy_1 passe par x_1, la suite $[y]$, déduite du réseau (y), est donc effectivement circonscrite à $[x]$.

121. Si l'on prend comme solution de l'adjointe $R = 0$, le point y est fixe et le réseau (y) est alors singulier. Donc, si l'on joint un point fixe ω aux différents points

$$\ldots x_{-p}, \ldots, x_{-1}, x, x_1, x_2, \ldots, x_q, \ldots$$

qui décrivent les réseaux de la suite $[x]$, on obtient une infinité de réseaux singuliers (no. 72), qui constituent une *suite singulière* $[\omega]$ circonscrite à $[x]$.

122. On peut démontrer que deux suites $[y]$ et $[y']$, circonscrites à la même suite $[x]$, sont inscrites dans une même suite de Laplace.

Il suffit de prouver que la droite yy' décrit une congruence (yy'). Or, on a

$$y_u = (R_u - b\,R)\,x, \; y_v = R\,x_1,$$
$$y'_u = (R'_u - b\,R')\,x, \; y'_v = R'\,x_1.$$

Si l'on élimine x entre y_u et y'_u, on trouve une relation qu'on peut mettre sous la forme

$$(y' + \lambda y)_u = A\,y + B\,y'.$$

Si l'on élimine ensuite x_1 entre y_v et y'_v, on obtient

$$(y' + \mu y)_v = C\,y + D\,y'.$$

Les deux relations obtenues prouvent bien que yy' décrit une congruence dont $y' + \lambda y$ et $y' + \mu y$ sont les foyers (no. 68).

---

[1]) *Darboux*, Leçons sur la théorie des surfaces (Tome II, p. 164 et suiv.).

Digitized by Google

V. SUITES POLAIRES RÉCIPROQUES.

123. Etant donnée, dans l'espace projectif E_{n-1}, la suite de Laplace $[x]$, considérons le pôle y de l'espace linéaire L_{n-2}, déterminé par les $n-1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, par rapport à l'espace quadratique

$$\Sigma X^2 = 0.$$

Je me propose de démontrer que le point y décrit un réseau, ensuite que le pôle y_1 de l'espace linéaire L_{n-2} déterminé par $x, x_1, \ldots, x_{n-2}$ est le transformé de Laplace de y dans le sens de la courbe v, enfin que, en général, le pôle du L_{n-2} déterminé par $x_{-p+1}, x_{-p+2}, \ldots, x_{-p+1}$ est le p-ième transformé de Laplace dans le sens de la courbe v si $p > 0$, dans le sens de la courbe u si $p < 0$.

Cette propriété qui met en évidence le caractère dualistique des réseaux et des suites de Laplace, sous une forme plus commode que celle qu'on aurait obtenue par une dualité, est due à M. *Darboux*[1]).

Pour faire la démonstration supposons que la relation linéaire qui existe entre $n+1$ points consécutifs de la suite $[x]$ soit (no. 115) la suivante

$$(3) \quad x_{-1} = a + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}, \quad a_{n-1} \neq 0$$

Cela étant posé, le point y est défini par

$$(4) \quad \Sigma y x_1 = 0, \ \Sigma y x_2 = 0, \ \ldots, \ \Sigma y x_{n-1} = 0,$$

auxquelles on peut ajouter, pour fixer le coefficient de proportionalité, la relation

$$(5) \quad \Sigma y x = 1.$$

On tire alors de (3)

$$(6) \quad \Sigma y x_{-1} = a.$$

De la même manière y_1 est déterminé par

$$(7) \quad \Sigma y_1 x = 0, \ \Sigma y_1 x_1 = 0, \ \ldots, \ \Sigma y_1 x_{n-2} = 0,$$

auxquelles on peut ajouter

$$(8) \quad \Sigma y_1 x_{-1} = 1$$

et alors (3) donne

$$(9) \quad \Sigma y_1 x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Pour que la proposition soit démontrée, il suffit de prouver que les points y et y_1 vérifient les relations

$$(10) \quad \frac{\delta y}{\delta v} = p y + q y_1, \ \frac{\delta y_1}{\delta u} = p' y + q' y_1,$$

---

[1]) Leçons sur la théorie des surfaces (Tome II, p. 184).

Digitized by Google

car il en résulte que la droite yy_1 décrit une congruence (yy_1) dont les réseaux focaux sont décrits par y et y_1.

Or de la relation suivante, tirée de (4)

$$\Sigma\, y\, x_p = 0,$$

on a, pour $0 < p \leqslant n-2$,

$$\Sigma\, y_v x_p + \Sigma\, y\,(x_{p+1} - a_p\, x_p) = 0,$$

donc en vertu de (4)

$$(11)\quad \Sigma\, y_v x_p = 0 \quad p = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Prenons maintenant la relation (5), on en tire

$$\Sigma\, y_v x + \Sigma\, y\,(x_1 - a\, x) = 0,$$

donc

$$(12)\quad \Sigma\, y_v x = a$$

Si l'on prend enfin la relation (6), on trouve

$$\Sigma\, y_v\, x_{-1} + \Sigma\, y \frac{\delta\, x_{-1}}{\delta\, v} = a_v.$$

Or

$$\frac{\delta x_{-1}}{\delta\, v} = (x_u + b x)_v = x_{uv} + b x_v + b_v x = -a x_u + (b_v - c)\, x = -a x_{-1} + k\, x,$$

donc

$$(13)\quad \Sigma\, y_v\, x_{-1} = a_v + a\, a - k.$$

A l'aide des relations (11), (12) et (13) on démontre aisément que l'on peut déterminer les fonctions p et q de manière que l'on ait

$$\Sigma\,(y_v - p\, y - q y_1)\, x_{-1} = 0,\ \Sigma\,(y_v - p\, y - q\, y_1)\, x = 0, \ldots,\ \Sigma\,(\ )\, x_{n-2} = 0,$$

à savoir

$$p = a,\ q = a_v - k.$$

Comme les points x_{-1}, x, ..., x_{n-2} sont linéairement indépendants (autrement la suite $[x]$ serait contenue dans un E_{n-2}), on a nécessairement

$$y_v = p\, y + q\, y_1$$

et la première relation (10) est démontrée. On démontre par le même procédé la seconde.

124. Les réseaux (y) et (y_1) que nous venons de mettre en évidence sont deux réseaux consécutifs de la suite $[y]$, polaire réciproque de $[x]$ par rapport à l'espace quadratique considéré.

Digitized by Google

Les relations géométriques qui existent entre les suites $[x]$ et $[y]$ sont réciproques. Si nous remarquons que l'on a successivement

$$\Sigma y_2 x_{-1} = 0,\ \Sigma y_2 x = 0,\ \Sigma y_2 x_1 = 0,\ \ldots,\ \Sigma y_2 x_{n-3} = 0;$$
$$\Sigma y_3 x_{-2} = 0,\ \Sigma y_3 x_{-1} = 0,\ \Sigma y_3 x = 0,\ \ldots,\ \Sigma y_3 x_{n-4} = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma y_{n-1} x_{-n+2} = 0,\ \Sigma y_{n-1} x_{-n+3} = 0,\ \ldots\ldots,\ \Sigma y_{n-1} x = 0,$$

on en conclut

$$\Sigma x y_1 = 0,\ \Sigma x y_2 = 0,\ \ldots,\ \Sigma x y_{n-1} = 0$$

qui prouvent que x est le pôle de l'espace linéaire L_{n-2} déterminé par y_1, y_2, $\ldots$, y_{n-1}.

125. Considérons actuellement une suite $[z]$ circonscrite à $[y]$, je dis que sa polaire réciproque est une suite $[t]$ inscrite dans $[x]$.

Prenons en effet tout d'abord un réseau (z) de la suite $[z]$ et démontrons que le point z qui décrit ce réseau est le pôle de l'espace linéaire déterminé par $n-1$ points consécutifs d'une suite $[t]$ inscrite dans $[x]$.

Soit

$$y_{uv} + A y_u + B y_v + C y = 0$$

l'équation de Laplace qui correspond au réseau (y).

Nous voulons prouver qu'on a

$$(14) \quad A + a = 0.$$

On a en effet

$$\Sigma y x_1 = 0,\ \Sigma y_v x_1 = 0;$$

de la première on tire

$$\Sigma y_u x_1 = -h$$

et de la seconde, en vertu de (12),

$$\Sigma y_{uv} x_1 = -ah,$$

qui donne la relation (14).

Ceci étant établi, le réseau (z) de la suite $[z]$ circonscrite à $[y]$ peut être défini par

$$(15) \quad z_u = (R_u - BR)\, y,\ z_v = R\,(y_v + A y),$$

R étant une solution de

$$R_{uv} - (A R)_u - (B R)_v + C R = 0.$$

Posons

$$X = \Sigma x z.$$

Digitized by Google

Un calcul simple donne, en tenant compte de (14) et (15)

$$X_u = \Sigma z\, x_u + R_u - B\,R, \quad X_v = \Sigma z\, x_v,$$

$$X_{uv} = \Sigma z\, x_{uv} - a\,(R_u - B\,R),$$

d'où

$$X_{uv} + a\,X_u + b\,X_v + c\,X = 0,$$

donc X est une solution de l'équation (1) de (x).

Définissons alors, à l'aide de cette solution de (1), la suite $[t]$ inscrite dans $[x]$, c'est-à-dire posons

$$t = X\,x_1 - X_1\,x$$

et en général

$$t_p = X_{p-1}\,x_p - X_p\,x_{p-1},$$

X_p étant la transformée de Laplace d'ordre p de la solution X.

Comme on a, à l'aide de (7),

$$X_1 = \Sigma z\,x_1, \quad X_2 = \Sigma z\,x_2, \ldots, \quad X_{n-1} = \Sigma z\,x_{n-1},$$

on en conclut

$$\Sigma z\,t = 0, \quad \Sigma z\,t_1 = 0, \ldots, \quad \Sigma z\,t_{n-2} = 0$$

qui prouvent bien que $[z]$ et $[t]$ sont polaires réciproques. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Si l'on a deux suites de Laplace polaires réciproques, à toute suite inscrite dans l'une il correspond une suite circonscrite à l'autre.

VI. SUITE DE LAPLACE D'UN RÉSEAU QUADRATIQUE.

126. Nous allons appliquer les résultats précédents à une suite $[x]$ déduite d'un réseau quadratique (x).

Nous voulons démontrer spécialement qu'à tout réseau quadratique il y a, en général, des congruences quadratiques conjuguées (no. 97).

Remarquons tout d'abord que pour un des réseaux focaux (y) d'une telle congruence on a

$$(16) \quad y_u = (R_u - b\,R)\,x, \quad y_v = R\,(x_v + a\,x) = R\,x_1.$$

Comme on a, par hypothèse,

$$\Sigma y^2 = 0,$$

on en déduit

$$\Sigma y\,y_u = 0, \quad \Sigma y\,y_v = 0,$$

d'où l'on tire, à l'aide de (16)

$$(17) \quad \Sigma y\,x = 0, \quad \Sigma y\,x_1 = 0.$$

Digitized by Google

De la première de ces relations on obtient aisément

$$(18) \quad \Sigma\, y\, x_{-1} = 0, \quad \Sigma\, y\, x_{-2} = 0.$$

Cela étant, considérons la suite $[t]$, polaire réciproque de $[x]$, et prenons spécialement les réseaux définis par les relations suivantes

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma\, t\, x_{-2} = 0, \ \Sigma\, t\, x_{-1} = 0, & \Sigma\, t\, x = 0, \ \Sigma\, t\, x_1 = 0, \ldots, & \Sigma\, t\, x_{n-4} = 0; \\ \Sigma\, t_1\, x_{-3} = 0, \ \Sigma\, t_1\, x_{-2} = 0, \ldots, & \Sigma\, t_1\, x_1 = 0, \ldots\ldots, & \Sigma\, t_1\, x_{n-5} = 0; \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma\, t_{n-5}\, x_{-n+3} = 0, & \Sigma\, t_{n-5}\, x_{-n+4} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots, & \Sigma\, t_{n-5}\, x_1 = 0 \\ \Sigma\, t_{n-4}\, x_{-n+2} = 0, & \Sigma\, t_{n-4}\, x_{-n+3} = 0, \ldots., & \Sigma\, t_{n-4}\, x = 0 \\ \Sigma\, t_{n-3}\, x_{-n+1} = 0, & \Sigma\, t_{n-4}\, x_{-n+2} = 0, \ldots., & \Sigma\, t_{n-3}\, x_{-1} = 0 \\ \Sigma\, t_{n-2}\, x_{-n} = 0, & \Sigma\, t_{n-2}\, x_{-n+1} = 0, \ldots., & \Sigma\, t_{n-2}\, x_{-2} = 0 \\ \Sigma\, t_{n-1}\, x_{-n-1} = 0 & \Sigma\, t_{n-1}\, x_{-n} = 0, \ldots. & \Sigma\, t_{n-1}\, x_{-3} = 0 \end{array} \right.$$

Les points t, t_1, ..., t_{n-1} étant linéairement indépendants, on peut exprimer y sous la forme

$$(19) \quad y = \lambda t + \lambda_1 t_1 + \ldots. + \lambda_{n-1} t_{n-1}.$$

Si l'on remarque maintenant que de (I) on a spécialement

$$\begin{array}{llll} \Sigma\, t_{n-4}\, x_{-2} = 0, & \Sigma\, t_{n-4}\, x_{-1} = 0, & \Sigma\, t_{n-4}\, x = 0, & \Sigma\, t_{n-4}\, x_1 \neq 0; \\ \Sigma\, t_{n-3}\, x_{-2} = 0, & \Sigma\, t_{n-3}\, x_{-1} = 0, & \Sigma\, t_{n-3}\, x \neq 0; & \\ \Sigma\, t_{n-2}\, x_{-2} = 0, & \Sigma\, t_{n-2}\, x_{-1} \neq 0; & & \\ \Sigma\, t_{n-1}\, x_{-2} \neq 0, & & & \end{array}$$

alors, en introduisant la valeur (19) de y dans (17) et (18), on obtient

$$\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \lambda_{n-3} = \lambda_{n-4} = 0,$$

donc

$$(20) \quad y = \lambda t + \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_{n-5} t_{n-5}.$$

La première des relations (16) montre alors que x a une expression de la forme

$$(21) \quad x = \mu_{-1} t_{-1} + \mu t + \mu_1 t_1 + \ldots + \mu_{n-5} t_{n-5}.$$

On a donc le résultat suivant:

S'il existe une congruence quadratique (xy), conjuguée au réseau quadratique (x), le foyer y appartient à l'espace linéaire L_{n-5} déterminé par les points t, t_1, ..., t_{n-5}, le point x appartient au L_{n-4} déterminé par t_{-1}, t, t_1, ..., t_{n-5}.

127. Ce qu'il y a d'intéressant c'est que l'on peut démontrer, à l'aide de (21), que le réseau (x) est un réseau dérivé d'ordre $n-4$ de (t).

Digitized by Google

A cet effet, il faut prouver que le second membre de (21) s'annule pour $n-4$ solutions de l'équation de Laplace

$$L(t) \equiv t_{uv} + a t_u + \beta t_v + \gamma t = 0$$

qui coorespond à (t), ou encore que le système

$$L(t) = 0, \quad \mu_{-1} t_{-1} + \mu t + \mu_1 t_1 + \ldots + \mu_{n-5} t_{n-5} = 0$$

définit un réseau (θ) dans un espace projectif à $n-5$ dimensions.

Or, pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit (no. 115) qu'en dérivant la seconde relation, que nous écrivons, pour abréger, sous la forme

$$(22) \quad E = 0,$$

par rapport à v et en éliminant t_{-1}, on obtienne une relation

$$E_v + p E = 0,$$

d'où, en dérivant par rapport à u, et en éliminant t_{n-4}, on obtienne une équation

$$(E_v + p E)_u + q (E_v + p E) = 0$$

qui soit identique à (22), c'est-à-dire

$$(E_v + p E)_u + q (E_v + p E) + r E \equiv 0.$$

Or cette condition est satisfaite, parceque x vérifie l'équation de Laplace (1).

On peut par conséquent prendre

$$x = \begin{vmatrix} t_{-1} & t & t_1 \ldots . & t_{n-5} \\ \theta_{-1} & \theta & \theta_1 \ldots . & \theta_{n-5} \\ \theta'_{-1} & \theta' & \theta'_1 \ldots . & \theta'_{n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_{-1}^{(n-5)} & \theta^{(n-5)} & \theta_1^{(n-5)} & \ldots . \theta_{n-5}^{(n-5)} \end{vmatrix}$$

$\theta, \theta', \theta'', \ldots, \theta^{(n-5)}$ étant $n-4$ solutions linéairement indépendantes de

$$L(t) = 0.$$

128. Comme le réseau (x) est manifestement un réseau dérivé du premier ordre de (y), celuici peut être choisi parmi les réseaux dérivées de l'ordre $n-5$ de (t).

On pourra donc poser

$$y = \lambda \begin{vmatrix} t & t_1 \ldots & t_{n-5} \\ \theta' & \theta'_1 \ldots & \theta'_{n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{(n-5)} & \theta_1^{(n-5)} \ldots & \theta_{n-5}^{(n-5)} \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

où λ est un facteur, choisi de manière que y vérifie le système (16), la solution θ laissée de côte étant celle qui permet d'obtenir (x) *à* partir de (y).

Comme on a

$$\Sigma\, y\, x = 0, \quad \Sigma\, y\, x_1 = 0,$$

le système (16) prouve que l'on a

$$\Sigma\, y^2 = \gamma_{11} = \text{const.}$$

Au lieu de θ, nous pouvons laisser une autre solution θ' de côté. On a ainsi un autre réseau (z), défini par

$$z = \lambda' \begin{vmatrix} t & t_1 & \dots & t_{n-5} \\ \theta & \theta_1 & \dots & \theta_{n-5} \\ \theta'' & \theta_1'' & \dots & \theta''_{n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{(n-5)} & \theta_1^{(n-5)} & \dots & \theta_{n-5}^{(n-5)} \end{vmatrix},$$

et qui satisfait à un système

$$z_u = (S_u - b\, S)\, x, \quad z_v = S\, x_1$$

analogue à (16), S étant une autre solution de l'équation de Laplace adjointe à (1). On a aussi

$$\Sigma z^2 = \gamma_{22} = \text{const.}$$

En remarquant qu'on a

$$(y + m\, z)_u = [(R + m\, S)_u - b\, (R + m\, S)]\, x, \quad (y + m\, z)_v = (R + m\, S)\, x_1, \quad m = \text{const.}$$

on déduit

$$\Sigma\, (y + m\, z)^2 = \text{const.}$$

d'où

$$\Sigma yz = \gamma_{12} = \text{const.}$$

On peut former $n - 4$ expressions analogues à y et à z. Posons

$$\varrho = m_1\, R + m_2\, S + \dots, \quad m_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \dots, n - 4,$$

ϱ est évidemment une solution de l'adjointe de (1), alors

$$\eta = m_1\, y + m_2\, z + \dots.$$

vérifie le système

$$\eta_u = (\varrho_u - b\, \varrho)\, x, \quad \eta_v = \varrho\, x_1.$$

On a

$$\Sigma\, \eta^2 = \text{const.} = \Sigma\, \gamma_{ik}\, m_i\, m_k.$$

Si on choisit maintenant les constantes m_i $(i = 1, 2, \dots, n - 4)$, de manière que l'on ait

$$\Sigma\, \gamma_{ik}\, m_i\, m_k = 0,$$

Digitized by Google

ce que l'on peut faire d'une infinité de manières, on aura

$$\Sigma \eta^2 = 0$$

et la congruence $(x\eta)$, conjuguée à (x), sera quadratique. On voit de là que la solution obtenue dépend essentiellement de $n - 6$ constantes arbitraires, ce qui demande que l'on ait $n \geqslant 6$. Pour $n = 6$ on a, en général, deux congruences quadratiques conjuguées au réseau quadratique (x).

La proposition que nous avions annoncée au no. 97 est donc complètement établie.

CHAPITRE VI.

SUITES TERMINÉES.

I. SUITES TERMINÉES DANS UN SENS.

129. Nous avons étudié jusqu'ici les suites de Laplace générales, celles qui ne s'arrêtent pas, c'est-à-dire celles auxquelles la transformation de Laplace ne cesse de s'appliquer ni dans un sens ni dans l'autre.

Nous allons maintenant commencer l'étude d'une classe remarquable de réseaux, dont la considération remonte, sous la forme analytique, jusqu'à *Laplace*, ce profond géomètre, qui a laissé ici, comme dans bien d'autres domaines, sa trace indélébile.

Nous supposerons donc dans ce chapître que la suite de Laplace s'arrête d'un côté ou des deux, qu'elle est terminée dans le sens des courbes u ou v, ou dans les deux sens.

130. *Suites terminées dans un sens.* Je suppose que (x_{p-1}), où $p > 0$, est le dernier réseau de la suite $[x]$, auquel on peut appliquer la transformation de Laplace et que par conséquent le point x_p décrit une courbe ou reste fixe.

Nous avons étudié, au no. 70, le cas où $p = 1$ et nous avons vu qu'il y avait deux cas principaux à étudier, *le cas de Laplace et le cas de Goursat*, et un troisième cas *mixte* qui fait partie des deux. Nous reprendrons cette étude ici, pour approfondir chacun de ces cas.

Notre hypothèse se traduit par la relation

$$A \frac{\delta x_p}{\delta u} + B \frac{\delta x_p}{\delta v} + C x_p = 0,$$

qui exprime que le point x_p décrit une courbe ou reste fixe.

Nous avons le cas de Laplace si $B = 0$ (on a alors nécessairement $h_{p-1} = 0$), le cas de Goursat si $B \neq 0$ (alors, en général, $h_p = 0$), enfin le cas mixte si $B \neq 0$ et $h_{p-1} = 0$.

Digitized by Google

131. *Cas de Laplace.* Supposons d'abord B = o. On a alors

$$(1)\quad A\frac{\delta x_p}{\delta u} + C x_p = o, \quad p > o;$$

or

$$\frac{\delta x_p}{\delta u} = -b x_p + h_{p-1} x_{p-1},$$

donc

$$A(-b x_p + h_{p-1} x_{p-1}) + C x_p = o.$$

Comme les points x_{p-1} et x_p sont distincts, on a nécessairement $h_{p-1} = o$, c'est-à-dire le réseau (x_{p-1}) a un de ses invariants nul.

Les tangentes aux courbes u = const., le long d'une courbe v = court., concourent en un même point décrivant la courbe (x_p) qui termine la suite $[x]$.

L'équation de Laplace qui correspond au réseau initial (x) s'intègre par la méthode de Laplace.

Il est maintenant évident que l'on peut donner à l'équation (1) la forme

$$\frac{\delta}{\delta u}\lambda x_p = o$$

ou, en remarquant que x_p est une expression linéaire en

$$x, \frac{\delta x}{\delta v}, \frac{\delta^2 x}{\delta v^2}, \ldots, \frac{\delta^p x}{\delta v^p},$$

$$(2)\quad \frac{\delta}{\delta u}\left(a x + a_1\frac{\delta x}{\delta v} + a_2\frac{\delta^2 x}{\delta v^2} + \ldots + a_p\frac{\delta^p x}{\delta v^p}\right) = o, \; a_p \neq o.$$

On a donc le résultat suivant dû à M. *Bompiani* (Sull'equazione di Laplace, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1912):

Si la suite $[x]$ *de l'espace projectif* E_{n-1} *se termine à* (x_p) *selon le cas de Laplace, le réseau* (x) *vérifie une équation de la forme* (2).

Réciproquement, supposons que (x) vérifie l'équation (2) et qu'il soit contenu dans un E_{n-1}, où $n > p + 1$, je dis que $[x]$ se termine à (x_p) selon le cas de Laplace.

On peut donner à la paranthèse de (2) la forme

$$\beta x + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p, \; \beta_p \neq o,$$

et alors l'équation (2) devient

$$\frac{\delta}{\delta u}(\beta x + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p) = o.$$

Développée cette égalité devient une relation linéaire entre x_{-1}, x, x_1, ..., x_{p-1} et x_p. Comme la suite $[x]$ appartient à un espace E_{n-1}, avec $n > p + 1$, ces points

Digitized by Google

sont linéairement indépendants et la relation obtenue doit être une identité. On a donc

$$\beta = 0,\ \beta_1 = 0,\ \ldots,\ \beta_{p-1} = 0,\ h_{p-1} = 0$$

et la relation (2) se réduit à

$$\frac{\delta}{\delta u}\beta_p\, x_p = 0.$$

c'est-à-dire à la forme (1). Cela suffit, *si x_p n'est pas nul*, pour prouver que $[x]$ s'arrête à (x_p) selon le cas de Laplace.

Le théorème de M. *Bompiani* est ainsi complètement démontré.

132. *Cas de Goursat.* Nous supposons actuellement que l'on a

$$(3)\quad A\frac{\delta x_p}{\delta u} + B\frac{\delta x_p}{\delta v} + C x_p = 0$$

et que $B \neq 0$, $h_{p-1} \neq 0$. Comme on a

$$\frac{\delta x_p}{\delta u} = -b\, x_p + h_{p-1}\, x_{p-1},\quad \frac{\delta x_p}{\delta v} = x_{p+1} - a_p\, x_p,$$

où

$$a_p = a_{p-1} - \frac{\delta \log h_{p-1}}{\delta v}$$

a, par hypothèse, un sens, la relation (3) devient

$$(4)\quad B\, x_{p+1} + (C - B\, a_p - A\, b)\, x_p + A\, h_{p-1}.\, x_{p-1} = 0.$$

On aurait ainsi formellement une relation linéaire entre trois points consécutifs de la suite $[x]$. On déduit aisément, en dérivant par rapport à u, que tous les points de la suite seraient en ligne droite. On en conclut que la relation (4) doit se réduire à une identité.

Comme $h_{p-1} \neq 0$, on a d'abord $A = 0$, ensuite

$$C = Ba_p,$$

enfin, comme $B \neq 0$, on a finalement

$$(5)\quad x_{p+1} = 0.$$

C'est là la forme que prend la relation (3) dans le cas de Goursat: c'est une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(6)\quad a\, x + a_1\frac{\delta x}{\delta v} + a_2\frac{\delta^2 x}{\delta v^2} + \ldots + a_{p+1}\frac{\delta^{p+1} x}{\delta v^{p+1}} = 0,\ a_{p+1} \neq 0$$

de l'ordre $p + 1$, vérifiée par le point x.

Remarquons, avant d'aller plus loin, que l'on tire de (5)

$$0 = \frac{\delta x_{p+1}}{\delta u} = -b\, x_{p+1} + h_p\, x_p = h_p x_p,$$

donc $h_p = 0$.

Digitized by Google

Comme on a

$$x_{p+1} = \frac{\partial x_p}{\partial v} + a_p x_p, \quad x_p = \frac{\partial x_{p-1}}{\partial v} + a_{p-1} x_{p-1},$$

la relation (5) peut s'écrire aussi sous la forme

$$\frac{\partial^2 x_{p-1}}{\partial v^2} + (a_{p-1} + a_p) \frac{\partial x_{p-1}}{\partial v} + \left(\frac{\partial a_{p-1}}{\partial v} + a_{p-1} a_p \right) x_{p-1} = 0,$$

qui prouve que *le réseau* (x_{p-1}) *est tracé* (no. 60) *sur une développable dont* (x_p), *qui est une courbe, est l'arête de rebroussement.*

D'ailleurs les relations

$$0 = x_{p+1} = \frac{\partial x_p}{\partial v} + a_p x_p,$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial u} = - b x_p + h_{p-1} x_{p-1},$$

où, par hypothèse, $h_{p-1} \neq 0$, prouvent que (x_p) est une courbe qui ne se réduit pas à un point fixe. *La développable sur la quelle se trouve tracé le réseau* (x_{p-1}) *ne se réduit donc pas à une surface conique.*

Revenons maintenant à la relation (6). On peut énoncer la proposition suivante:

Si la suite de Laplace $[x]$ *est terminée à* (x_p) *selon le cas de Goursat, le point* x *vérifie une équation aux dérivées partielles de la forme* (6).

Nous allons démontrer la réciproque, en supposant que le réseau (x) appartient à un E_{n-1}, avec $n > p + 1$. On peut donnner évidemment à (6) la forme

$$\beta x + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{p+1} x_{p+1} = 0, \quad \beta_{p+1} \neq 0;$$

il en résulte

$$\beta = \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$$

et

$$x_{p+1} = 0,$$

ce qui prouve bien qu'on a le cas de Goursat.

133. *Le cas mixte.* On a cette fois

$$A \frac{\partial x_p}{\partial u} + B \frac{\partial x_p}{\partial v} + C x_p = 0$$

avec $B \neq 0$ et $h_{p-1} = 0$. Dans ce cas

$$(7) \quad \frac{\partial x_p}{\partial u} = - b x_p + h_{p-1} x_{p-1} = - b x_p$$

et la relation initiale devient

$$(8) \quad B \frac{\partial x_p}{\partial v} + (C - A b) x_p = 0.$$

Digitized by Google

Les relations (7) et (8) prouvent que *le point x_p est fixe, donc le réseau (x_{p-1}) est tracé sur une surface conique.*

Nous avons ainsi analysé tous les cas où le réseau (x_p), $p>0$, de la suite $[x]$ se réduit à une courbe ou à un point fixe. Les résultats sont tout pareils si $p<0$.

134. *Théorème de Goursat.* Nous voulons maintenant établir une relation de dualité entre les suites terminées dans un sens selon le cas de Laplace et celles terminées selon le cas de Goursat, relation qui nous conduira à un théorème intéressant de M. *Goursat*[1]).

Nous supposerons que, par une projection, nous avons remplacé la suite donnée par une autre $[x]$ qui s'arrête à (x_p), $p>0$, selon le cas de Goursat et qui soit contenue dans un espace E_{p+1} à $p+1$ dimensions.

Cela étant, prenons (no. 123 et 124) la suite $[y]$, polaire réciproque de $[x]$.

Nous définirons le réseau initial (y) de cette nouvelle suite à l'aide des relations

$$\Sigma y x_{p-1}=0,\ \Sigma y x_{p-2}=0,\ \ldots,\ \Sigma y x_1=0,\ \Sigma y x=0,\ \Sigma y x_{-1}=0.$$

Il est aisé de voir que la suite $[y]$ est sans fin dans le sens des courbes v. Les réseaux successifs (y_1), (y_2), ... dans ce sens-là sont définis par

$$\Sigma y_1 x_{p-2}=0,\ \Sigma y_1 x_{p-3}=0,\ \ldots,\ \Sigma y_1 x=0,\ \Sigma y_1 x_{-1}=0,\ \Sigma y_1 x_{-2}=0;$$

$$\Sigma y_2 x_{p-3}=0,\ \Sigma y_2 x_{p-4}=0,\ \ldots,\ \Sigma y_2 x_{-1}=0,\ \Sigma y_2 x_{-2}=0,\ \Sigma y_2 x_{-3}=0;$$

. . . . . .

Il n'en est pas de même dans le sens des courbes u. Je dis que $[y]$ est terminé à (y_{-1}) selon le cas de Laplace. On a en effet

$$(9)\quad \Sigma y_{-1} x_p=0,\ \Sigma y_{-1} x_{p-1}=0,\ \ldots,\ \Sigma y_{-1} x_1=0,\ \Sigma y_{-1} x=0,$$

d'où l'on tire, en vertu de (5)

$$\Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x_p=0,\ \Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x_{p-1}=0,\ \ldots,\ \Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x_1=0,\ \Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x=0,$$

donc

$$(10)\quad \frac{\delta y_{-1}}{\delta v}=\lambda y_{-1}$$

qui prouve bien que (y_{-1}) est réduit à une courbe. Les relations précédentes prouvent que cette courbe ne se réduit pas un point, autrement il y aurait une relation linéaire entre les points x_{-1}, x, x_1, x_2, ..., x_p, ce qui n'est pas.

---

[1]) Voir *Goursat*: Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace (American Journal of Math., 1896, p. 347) et Leçons sur l'intégr. des équ. aux dérivées part. du 2-e ordre, (Tome II, p. 21 et suiv.).

Digitized by Google

On voit de (10), car ici $p = -1$, que la suite $[y]$ s'arrête à (y_{-1}) selon le cas de Laplace. On voit d'ailleurs que c'est bien le cas de Laplace, par le fait que la courbe (y_{-1}) n'est pas tangente à $y_{-1}\ y$.

On peut donc énoncer le théorème suivant qui est la forme géométrique du théorème de Goursat:

Si une suite $[x]$ *s'arrête dans le sens des courbes* v *selon le cas de Goursat, la suite polaire* $[y]$ *s'arrête dans le sens des courbes* u *selon le cas de Laplace.*

En vertu de (10) on peut prendre

$$y_{-1}^{(i)} = \varphi_i(u), \; i = 1, 2, \ldots, p+2$$

et alors les relations (9) deviennent

$$\Sigma\varphi\,(u)\,x = 0, \;\; \Sigma\varphi\,(u)\,x_1 = 0, \;\; \ldots, \;\; \Sigma\varphi(u)\,x_p = 0,$$

où il suffit de prendre la première, car les autres s'en suivent. Donc:

Si $[x]$ *est terminée à* (x) *selon le cas de Goursat et de plus est contenue dans un* E_{p+1}, *on a*

$$\Sigma\varphi\,(u)\,x = 0.$$

Ce théorème, d'ailleurs, et sa réciproque sont des conséquences immédiates de la relation (6).

135. Nous pouvons construire maintenant la suite la plus générale $[x]$, terminée dans le sens des courbes v selon un de cas étudiés. A cet effet nous prendrons comme réseau initial (x), le dernier réseau proprement dit; le réseau (x_1) sera alors une courbe ou un point fixe.

Considérons tout d'abord le cas de Laplace. L'invariant h de (x) est alors nul. On peut donc prendre pour l'équation de Laplace (no. 63)

$$x_{uv} + bx_v = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$x = \int \mathrm{V}\, e^{\int b\,du}\, dv + \mathrm{U}.$$

On peut donc prendre pour le réseau initial (x)

$$(11) \quad x^{(i)} = \int \theta(u, v)\, V_i\, dv + \mathrm{U}_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

La suite de ce réseau dans le sens des courbes u est, en général, indéfinie. Dans le cas où les fonctions V_i de (11) satisfont à une équation de la forme

$$\mathrm{V}' + p\,\mathrm{V} = 0,$$

le point x_1 est fixe et le réseau (x) est tracé sur une surface conique. On peut prendre alors

$$x^{(i)} = a_i\,\omega\,(u, v) + \mathrm{U}_i.$$

Digitized by Google

Le réseau (x) est formé dans ce cas — le cas mixte de la théorie générale — par les génératrices de la surface conique et par une famille arbitraire de courbes, tracée sur cette surface.

Comme, dans le cas de Goursat, le réseau (x) est tracé sur une développable, dont la courbe (x_1) est l'arrête de rebroussement, il est aisé de voir que l'on peut poser

$$x^{(i)} = \theta(u, v) \cdot U_i + U'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

On déduit de ce réseau la suite $[x]$, terminée à (x_1) selon le cas de Goursat.

Remarque. Il est intéressant de remarquer que le système

$$L \equiv x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0,$$

$$x_{p+1} = 0$$

est compatible en vertu de la seule condition $h_p = 0$. En effet, on peut remplacer ce système par le suivant

$$L_1 \equiv (x_1)_{uv} + a_1 (x_1)_u + b_1 (x_1)_v + c_1 x_1 = 0, \ (x_1)_p = 0,$$

et, de proche en proche, par

$$L_p \equiv (x_p)_{uv} + a_p (x_p)_u + b_p (x_p)_v + c_p x_p = 0, \ (x_p)_1 = 0,$$

que nous écrivons, pour simplifier les notations,

$$x'_{uv} + a' x'_u + b' x'_v + c' x' = 0, \ x'_v + a' x' = 0.$$

Or, en dérivant la seconde par rapport à u, on obtient

$$(a'_u + a' b' - c') x' = 0,$$

où le premier facteur est $h_p = 0$.

II. SUITES TERMINÉES DANS LES DEUX SENS.

136. *Différents cas.* Le problème le plus intéressant, que l'on puisse se poser sur les suites de Laplace terminées, est celui des suites terminées dans les deux sens.

De tout ce qui précède il résulte qu'il y a trois cas principaux à considérer:

1. Suites terminées dans les deux sens selon le cas de Laplace;
2. Suites terminées dans les deux sens selon le cas de Goursat:
3. Suites terminées dans un sens selon le cas de Laplace et dans l'autre sens selon le cas de Goursat.

Il faudra envisager ensuite dans chacun de ces cas principaux la réduction du cas de Laplace ou de Goursat au cas mixte.

Digitized by Google

137. *Suites terminées dans les deux sens selon le cas de Laplace.* Ce problème a été étudié pour la première fois, sous sa forme analytique, par *Moutard*, repris et complété par M. *Darboux*[1]), sous la forme géométrique par *Bompiani*[2]).

Nous donnerons ici une nouvelle solution géométrique, basée sur une remarque de M. *Darboux* (Leçons, Tome II, p. 171).

Nous supposons que la suite $[x]$, déduite du réseau initial (x), est terminée, selon le cas de Laplace, à (x_p) dans le sens des courbes v et à (x_{-q}) dans le sens des courbes u. Les réseaux (x_p) et (x_{-q}) sont ainsi réduits à des courbes, le long de la première variant v, le long de la seconde u. On a enfin $h_{p-1} = 0$, $k_{-(q-1)} = 0$.

Cela étant posé, considérons la suite $[y]$ inscrite dans $[x]$, formée en partant de la solution R de l'équation de Laplace qui correspond à (x). On peut prendre comme réseau initial (y), celui qui est décrit par

$$y = \mathrm{R}\, x_u - \mathrm{R}_u\, x = \mathrm{R}\, x_{-1} - \mathrm{R}_{-1} x$$

et alors (no. 116) on a

$$y_p = \mathrm{R}_p\, x_{p-1} - \mathrm{R}_{p-1}\, x_p.$$

Il y a, dans le sens des courbes v, deux cas à considérer:

1. Si $\mathrm{R}_p = 0$ — ce qui est possible en vertu de la remarque du no. 135 — la suite $[y]$ s'arrête à $(y_p) \equiv (x_p)$, évidemment selon le cas de Laplace.

2. Si $\mathrm{R}_p \neq 0$, alors y_p décrit un réseau et comme

$$y_{p+1} = \frac{\delta \mathrm{R}_p}{\delta v}\, x_p - \mathrm{R}_p \frac{\delta x_p}{\delta v}$$

décrit, en vertu de la relation

$$\frac{\delta y_{p+1}}{\delta u} = -2 b_p\, y_{p+1},$$

une courbe, le long de la quelle varie v, la suite $[y]$ s'arrête à (y_{p+1}) selon le cas de Laplace.

Si l'on considère la suite $[y]$ aussi dans le sens des courbes u, on obtient la proposition générale suivante:

Soit (x) un réseau initial dont la suite $[x]$ est terminée à (x_p) et (x_{-q}) selon le cas de Laplace, c'est-à-dire la suite est composée de $p + q + 1$ termes, y comprises les courbes (x_p) et (x_{-q}). Si R *est une solution de l'équation de Laplace qui correspond à (x) et que l'on considére la suite $[y]$ inscrite dans $[x]$, dont un réseau initial (y) est défini par*

$$y = \mathrm{R}x_{-1} - \mathrm{R}_{-1}\, x,$$

on a alors quatre cas à considérer:

---

[1]) *Darboux*: Leçons sur la théorie générale des surfaces (Tome II, voir la notice historique à la page 52—53).

[2]) *Bompiani*: Risoluzione geometrica del problema din Moutard etc. (Rend. Acc. dei Lincei, T. II, 1915).

Digitized by Google

1. $R_p \neq 0$, $R_{-q} \neq 0$, *la suite* $[y]$ *est terminée à* (y_{p+1}) *et* (y_{-q}) *selon le cas de Laplace, elle a* $p + q + 2$ *termes, un de plus que la suite* $[x]$;

2. et 3. $R_p \neq 0$, $R_{-q} = 0$ *ou bien* $R_p = 0$, $R_{-q} \neq 0$, *la suite* $[y]$ *a* $p + q + 1$ *termes, comme* $[x]$;

4. $R_p = 0$, $R_{-q} = 0$, *la suite* $[y]$ *s'arrête à* $(y_p) \equiv (x_p)$ *et à* $(y_{-q+1}) \equiv (x_{-q})$, *elle n'a donc que* $p + q$ *termes, un de moins que* $[x]$.

138. On peut faire une application intéressante de la proposition précédente. Considérons le réseau (x) décrit par le point

$$x^{(i)} = U_i + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ou encore

$$x = U + V,$$

les U et les V étant des fonctions de la seule variable u et de la seule variable v respectivement.

La suite $[x]$ s'arrête à (x_1) et à (x_{-1}) selon le cas de Laplace, si les U et les V ne satisfont pas aux relations

$$U'' = 0, \quad V'' = 0.$$

Dans ces conditions $[x]$ a trois termes et il s'agit d'en déduire une suite inscrite à quatre termes.

Posons

$$R^{(1)} = A_1 + B_1,$$

A_1 étant une fonction de u, B_1 une fonction de v, comme

$$R^{(1)}{}_1 = B'_1, \quad R^{(1)}{}_{-1} = A'_1,$$

il faudra supposer

$$A'_1 \neq 0, \quad B'_1 \neq 0,$$

alors

$$y = \begin{vmatrix} U + V & U' \\ A_1 + B_1 & A'_1 \end{vmatrix}$$

définit un réseau (y) dont la suite $[y]$ est terminée, selon le cas de Laplace, à (y_2) et à (y_{-1}).

On peut aller plus loin. Si A_2 est une nouvelle fonction de u, B_2 une nouvelle fonction de v, alors

$$R^{(2)} = \begin{vmatrix} A_1 + B_1 & A'_1 \\ A_2 + B_2 & A'_2 \end{vmatrix}$$

est évidemment une solution de l'équation de Laplace qui correspond à (y). A

Digitized by Google

l'aide de cette solution on peut définir une suite $[z]$ inscrite dans $[y]$, à savoir on pourra prendre

$$z = \begin{vmatrix} U + V & U' & U'' \\ A_1 + B_1 & A'_1 & A''_1 \\ A_2 + B_2 & A'_2 & A''_2 \end{vmatrix}$$

Comme

$$R_2^{(2)} = \begin{vmatrix} B'_1 & B''_1 \\ B'_2 & B''_2 \end{vmatrix}, \quad R_{-1}^{(2)} = \begin{vmatrix} A'_1 & A''_1 \\ A'_2 & A''_2 \end{vmatrix},$$

la suite $[z]$ sera terminée à (z_3) et à (z_{-1}) selon le cas de la Laplace, si

$$\begin{vmatrix} A'_1 & A''_1 \\ A'_2 & A''_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} B'_1 & B''_1 \\ B'_2 & B''_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On peut arriver ainsi, de proche en proche, au réseau suivant

$$t = \begin{vmatrix} U + V & U' & U'' & \dots & U^{(m)} \\ A_1 + B_1 & A'_1 & A''_1 & \dots & A_1^{(m)} \\ A_2 + B_2 & A'_2 & A''_2 & \dots & A_2^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m + B_m & A'_m & A''_m & \dots & A_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

dont la suite $[t]$ s'arrête à (t_{m+1}) et à (t_{-1}) et a par conséquent $m + 3$ termes, si

$$\begin{vmatrix} A'_1 & A''_1 \dots & A_1^{(m)} \\ A'_2 & A''_2 \dots & A_2^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A'_m & A''_m \dots & A_m^{(m)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} B'_1 & B''_1 \dots & B_1^{(m)} \\ B'_2 & B''_2 \dots & B_2^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B'_m & B''_m \dots & B_m^{(m)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Si nous posons

$$m = p + q - 2$$

et si l'on prend

$$\xi = t_{q-1} = \begin{vmatrix} U + V & U' & U'' & \dots & U^{(p-1)} & V' & V'' & \dots & V^{(q-1)} \\ A_1 + B_1 & A'_1 & A''_1 & \dots & A_1^{(q-1)} & B'_1 & B''_1 & \dots & B_1^{(q-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m + B_m & A'_m & A''_m & \dots & A_m^{(q-1)} & B'_m & B''_m & \dots & B_m^{(q-1)} \end{vmatrix},$$

la suite $[\xi]$ *est terminée, selon le cas de Laplace, à* (ξ_p) *et à* (ξ_{-q}).

Nous avons réussi à construire de cette manière une suite qui s'arrête dans les deux sens selon le cas de Laplace et qui a une grande généralité.

Digitized by Google

Il s'agit de démontrer que l'on obtient ainsi toute suite terminée dans les deux sens selon le cas de Laplace.

139. Considérons un réseau (x) dont la suite soit terminée selon le cas de Laplace à (x_p) et (x_{-q}). La suite $[x]$ a donc $p+q+1$ termes. Nous voulons prouver que *l'on peut construire une suite* $[y]$ *circonscrite à* $[x]$ *qui soit terminée dans les deux sens selon le cas de Laplace et qui n'ait que* $p+q$ *termes.*

Tout d'abord il est manifeste, d'après la proposition du no. 137, que toute suite circonscrite à $[x]$ est terminée dans les deux sens selon le cas de Laplace.

En second lieu, prenons le réseau (y) défini par (no. 78)

$$y_u = (S_u - b\,S)\,x, \quad y_v = S\,x_1,$$

S étant une solution de l'équation

$$S_{uv} - (a\,S)_u - (b\,S)_v + c\,S = 0,$$

adjointe à celle qui est vérifiée par (x). La suite $[y]$, déduite de (y), est circonscrite à $[x]$.

On peut prendre pour le premier transformé de Laplace de y

$$y_1 = -y + S'\,x_1,$$

où S' est donné par

$$S_u - b\,S = h\,S';$$

on a en effet

$$\frac{\delta y_1}{\delta u} = (S'_u - b\,S')\,x_1, \quad \frac{\delta y_1}{\delta v} = S'\,x_2.$$

S est donc une solution de l'adjointe de l'équation vérifiée par (x_1) et on a de plus

$$S = S'_v - a_1\,S'.$$

On a de la même manière

$$y_2 = -y_1 + S''\,x_2,$$

où S'' est tiré de

$$S'_u - b\,S' = h_1\,S''$$

et de plus

$$S' = S''_v - a_2\,S''$$

et ainsi de suite. Finalement, on a

$$y_{p-1} = -y_{p-2} + S^{(p-1)}\,x_{p-1},$$

avec les relations

$$\frac{\delta y_{p-1}}{\delta u} = (S_u^{(p-1)} - b\,S^{(p-1)})\,x_{p-1}, \quad \frac{\delta y_{p-1}}{\delta v} = S^{(p-1)}\,x_p,$$

Digitized by Google

ou

$$S_u^{(p-2)} - b\,S^{(p-2)} = h_{p-2}\,S^{(p-1)}$$

et de plus

$$S^{(p-2)} = S_v^{(p-1)} - a_{p-1}\,S^{(p-1)}.$$

On a deux cas à considérer:

1. *Si* $S_u^{(p-1)} - b\,S^{(p-1)} \neq 0$, y_{p-1} *décrit un réseau* (y_{p-1}) *dont le transformé de Laplace* $(y_p) \equiv (x_p)$ *est une courbe.*

2. *Si* $S_u^{(p-1)} - b\,S^{(p-1)} = 0$, (y_{p-1}) *se réduit à une courbe.*

On a des résultats analogues dans le sens des courbes u. On prendra d'abord

$$y_{-1} = -y + S\,x$$

et on aura

$$\frac{\delta\,y_{-1}}{\delta\,u} = S\,x_{-1}, \quad \frac{\delta\,y_{-1}}{\delta\,v} = (S_v - a\,S)\,x.$$

On prend ensuite

$$y_{-2} = -y_{-1} + S^{(-1)}\,x_{-1},$$

où $S^{(-1)}$ est défini par

$$S_v - a\,S = k\,S^{(-1)}$$

et on a de plus

$$S = S_u^{(-1)} - b_{-1}\,S^{(-1)}.$$

Finalement, on prendra

$$y_{-q} = -y_{-q+1} + S^{(-q+1)}\,x_{-q+1},$$

qui satisfait à

$$\frac{\delta\,y_{-q}}{\delta\,u} = S^{(-q+1)}\,x_{-q}, \quad \frac{\delta\,y_{-q}}{\delta\,v} = (S_v^{(-q+1)} - a\,S^{(-q+1)})\,x_{-q+1},$$

où $S^{(-q+1)}$ est tiré de

$$S_v^{(-q+2)} - a\,S^{(-q+2)} = k_{-q+2}\,S^{(-q+1)}$$

et on a de plus la relation

$$S^{(-q+2)} = S_u^{(-q+1)} - b_{-q+1}\,S^{(-q+1)}.$$

Donc:

1. *Si* $S_v^{(-q+1)} - a\,S^{(-q+1)} \neq 0$, (y_{-q}) *est un réseau et* $(y_{-q-1}) \equiv (x_{-q})$ *est une courbe.*

2. *Si* $S_v^{(-q+1)} - a\,S^{(-q+1)} = 0$, (y_{-q}) *se réduit à une courbe.*

Digitized by Google

La proposition que nous avons énoncée au début de ce no. sera démontrée, si nous prouvons que le système suivant

$$S_{uv} - (aS)_u - (bS)_v + cS = 0;$$

$$S_u - bS = hS', \quad S'_u - bS' = h_1 S'', \ldots, \quad S_u^{(p-2)} - bS^{(p-2)} = h_{p-2} S^{(p-1)},$$

$$S_u^{(p-1)} - bS^{(p-1)} = 0;$$

$$S_v - aS = kS^{(-1)}, \quad S_v^{(-1)} - aS^{(-1)} = k_{-1} S^{(-2)}, \ldots, \quad S_v^{(-q+2)} - aS^{(-q+2)}$$

$$= k_{-q+2} S^{(-q+1)}, \quad S_v^{(-q+1)} - aS^{(-q+1)} = 0$$

est compatible. Or cela est vrai en vertu des relations $h_{p-1} = 0$, $k_{-q+1} = 0$ et on le démontre aisément en tenant compte du système

$$S'_v - a_1 S = S, \quad S''_v - a_2 S'' = S', \ldots, \quad S_v^{(p-1)} - a_{p-1} S^{(p-1)} = S^{(p-2)}$$

$$S_u^{(-1)} - b_{-1} S^{(-1)} = S, \quad S_u^{(-2)} - b_{-2} S^{(-2)} = S^{(-1)}, \ldots,$$

$$S_u^{(-q+1)} - b_{-q+1} S^{(-q+1)} = S^{(-q+2)}$$

Dans ces conditions la suite $[y]$ s'arrête à (y_{p-1}) et (y_{-q}) et elle a seulement $p + q$ termes.

En partant de celle-ci on déduit, par le même procédé, une nouvelle suite terminée dans les deux sens selon le cas de Laplace et qui n'ait que $p + q - 1$ termes, et ainsi de suite. On arrive ainsi à une suite $[z]$ qui n'a que trois termes, dont le seul réseau proprement dit (z) a les invariants $h = k = 0$ et pour lequel l'équation de Laplace correspondante peut être réduite à la forme

$$z_{uv} = 0.$$

Nous sommes retombés ainsi sur le cas que nous avons étudié au no. 138 et qui est bien le cas général, comme nous venons de le prouver en toute rigueur.

140. *Suites terminées dans les deux sens selon le cas de Goursat.* M. *Bompiani*, dans une Note déjà citée, a donnée une méthode géométrique remarquable pour construire les suites terminées dans les deux sens selon le cas de Goursat. Nous y arriverons par une méthode analytique tout aussi simple.

Soit donc (x) un réseau dont la suite $[x]$ est terminée à (x_p) et (x_{-q}) selon le cas de Goursat. On a alors $h_p = k_{-q} = 0$ et le réseau (x) est déterminé, à une projectivité près, par le système

$$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0, \quad x_{p+1} = 0, \quad x_{q-1} = 0.$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles prouve que (x) et sa suite sont contenus dans un espace E_m à $m = p + q$ dimensions, car l'intégrale générale dépend, sous forme linéaire et homogène, de $p + q + 1$ constantes arbitraires, les valeurs pour $u = u_0$, $v = v_0$ de $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial^p x}{\partial u^p}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \ldots, \frac{\partial^q x}{\partial v^q}$, ou bien (x) est la projection d'un tel réseau.

Nous supposerons le réseau (x) lui-même contenu dans un E_m.

Digitized by Google

Remarquons maintenant que pour le réseau (x_{-q+1}) de la suite $[x]$, on a, en vertu de $x_{p+1} = 0$,

$$(x_{-q+1})_{p+q} = 0.$$

Il existe alors (no. 134) $m+1 = p+q+1$ fonctions $A_i(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ de la seule variable u, de manière que l'on ait

$$\Sigma A\, x_{-q+1} = 0, \quad \Sigma A\, x_{-q+2} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A\, x_p = 0.$$

On tire de là d'abord

$$\Sigma A'\, x_{-q+2} = 0, \quad \Sigma A'\, x_{-q+3} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A'\, x_p = 0,$$

ensuite

$$\Sigma A''\, x_{-q+3} = 0, \quad \Sigma A''\, x_{-q+4} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A''\, x_p = 0,$$

finalement

$$\Sigma A^{(q-1)}\, x = 0, \quad \Sigma A^{(q-1)}\, x_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(q-1)}\, x_p = 0.$$

On voit ainsi que le point x satisfait aux relations

$$(12) \quad \Sigma A\, x = 0, \quad \Sigma A'\, x = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(q-1)}\, x = 0.$$

On démontrerait de la même manière qu'il existe $m+1$ fonctions $B_i(v)$ $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ de v, de manière que l'on ait

$$(13) \quad \Sigma B\, x = 0, \quad \Sigma B'\, x = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma B^{(p-1)}\, x = 0.$$

Comme les fonctions A_i et les fonctions B_i $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ sont linéairement indépendantes (autrement la suite $[x]$ aurait moins de $p+q+1$ termes), les deux systèmes précédents, qui ont en tout $p+q$ équations, déterminent le point x.

On a donc le résultat suivant:

Si la suite $[x]$ du réseau (z) s'arrête à (x_p) et (x_{-q}) selon le cas de Goursat, il existe $m+1$ fonctions de u et $m+1$ fonctions de v, de manière que le point x qui décrit le réseau (x) soit déterminé par les équations (12) *et* (13), *ou bien le réseau (x) est la projection d'un tel réseau.*

141. Nous voulons démontrer la réciproque de la proposition précédente.

Nous supposons donc que, les $A_i(u)$, $B_i(v)$ $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ étant des fonctions arbitraires, les équations (12) et (13) déterminent le point x de l'espace E_m. Je dis que x décrit un réseau (x), dont la suite $[x]$ est terminée à (x_p) et (x_{-q}) selon le cas de Goursat.

Il est aisé de tirer de (12) et (13) que les $x^{(i)}$, $x^{(i)}_u$, $x^{(i)}_v$, $x^{(i)}_{uv}$ $(i = 1, 2, \ldots, m+1$ vérifient le système

$$(14) \quad \begin{cases} \Sigma A\, \xi = 0, \quad \Sigma A'\, \xi = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(q-2)}\, \xi = 0, \\ \Sigma B\, \xi = 0, \quad \Sigma B'\, \xi = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma B^{(p-2)}\, \xi = 0, \end{cases}$$

Digitized by Google

formé de $p+q-2=m-2$ équations. Le même système est vérifié par les $m+1$ fonctions

$$(15)' \quad x^{(i)}_{uv} + a\,x^{(i)}_u + b\,x^{(i)}_v + c\,x^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1.$$

quelque soient les fonctions a, b, c. On peut déterminer ces dernières fonctions de manière que 3 des fonctions (15) soient nulles, il en résulte que les autres $m-2$ le sont aussi. On a donc

$$x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0$$

pour toutes les coordonnées du point x, qui décrit bien un réseau (x).

Des relations (12) et (13) on obtient

$$\Sigma A\,x_1 = 0, \quad \Sigma A'\,x_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(q-1)}\,x_1 = 0, \quad \Sigma A^{(q)}\,x_1 = 0,$$
$$\Sigma B\,x_1 = 0, \quad \Sigma B'\,x_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma B^{(p-2)}\,x_1 = 0,$$

de là on tire

$$\Sigma A\,x_2 = 0, \quad \Sigma A'\,x_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(q+1)}\,x_2 = 0,$$
$$\Sigma B\,x_2 = 0, \quad \Sigma B'\,x_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma B^{(p-3)}\,x_2 = 0,$$

et ainsi de suite. On a ainsi

$$\Sigma A\,x_{p-1} = 0, \quad \Sigma A'\,x_{p-1} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(p+q-2)}\,x_{p-1} = 0, \quad \Sigma B\,x_{p-1} = 0$$

et finalement le système

$$\Sigma A\,x_p = 0, \quad \Sigma A'\,x_p = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(p+q-1)}\,x_p = 0$$

qui montre que le point x_p décrit une courbe (x_p) le long de laquelle varie u. Cette courbe ne se réduit pas à un point fixe, parce que, par hypothèse, les A_i $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ sont linéairement indépendantes.

Comme on tire encore du dernier système

$$\Sigma A\,x_{p+1} = 0, \quad \Sigma A'\,x_{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(p+q)}\,x_{p+1} = 0,$$

on a

$$x_{p+1} = 0,$$

et la suite $[x]$ est bien terminée à (x_p) selon le cas de Goursat. On démontre de la même manière qu'elle est terminée à (x_{-q}), selon le même cas.

142. *Suites terminées selon le cas de Goursat dans un sens, selon le cas de Laplace dans l'autre.*

Nous appliquerons ici la méthode que nous avons employée aux n-os. 137, 138 et 139.

Considérons un réseau (x) dont la suite s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat, à (x_{-q}) selon le cas de Laplace. On a alors $h_p = 0$, $x_{p+1} = 0$, $k_{-q+1} = 0$.

Digitized by Google

Soit maintenant

$$y = \mathrm{R}\, x_{-1} - \mathrm{R}_{-1}\, x$$

le réseau initial d'une suite inscrite dans $[x]$.

Comme on a

$$y_p = \mathrm{R}_p\, x_{p-1} - \mathrm{R}_{p-1}\, x_p, \quad \frac{\delta\, y_p}{\delta\, v} = -(a_{p-1} + a_p)\, y_p + \mathrm{R}_{p+1}\, x_{p-1}$$

et

$$y_{p+1} = \mathrm{R}_{p+1}\, x_p,$$

et comme dans le sens des courbes u s'applique la proposition du no. 137, on a la proposition suivante:

Soit (x) un réseau initial dont la suite $[x]$ s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat et à (x_{-q}) selon le cas de Laplace, c'est-à-dire la suite est composée de $p + q + 1$ termes, y comprises les courbes (x_p) et (x_{-q}). R étant une solution de l'équation de Laplace vérifiée par x, si l'on considère la suite $[y]$ inscrite dans $[x]$, dont un réseau initial est défini par

$$y = \mathrm{R}\, x_{-1} - \mathrm{R}_{-1}\, x,$$

on a alors les quatre cas suivants à considérer:

1. $\mathrm{R}_{p+1} \neq 0$, $\mathrm{R}_{-q} \neq 0$, *la suite $[y]$ s'arrête à $(y_{p+1}) \equiv (x_p)$ selon le cas de Goursat et à (y_{-q}) selon le cas de Laplace, elle a donc $p + q + 2$ termes (un de plus que $[x]$);*

2. $\mathrm{R}_{p+1} \neq 0$, $\mathrm{R}_{-q} = 0$, *la suite $[y]$ s'arrête à $(y_{p+1}) \equiv (x_p)$ selon le cas de Goursat et à $(y_{-q+1}) \equiv (x_{-q})$ selon le cas de Laplace, elle a, comme $[x]$, $p + q + 1$ termes;*

3. $\mathrm{R}_{p+1} = 0$, $\mathrm{R}_{-q} \neq 0$, *$[y]$ s'arrête à (y_p) selon le cas de Goursat, à (y_{-q}) selon le cas de Laplace, et elle a, comme $[x]$, $p + q + 1$ termes;*

4. $\mathrm{R}_{p+1} = 0$, $\mathrm{R}_{-q} = 0$, *$[y]$ s'arrête à (y_p) selon le cas de Goursat, à $(y_{-q+1}) \equiv (x_{-q})$ selon le cas de Laplace, et elle a $p + q$ termes (un de moins que $[x]$).*

143. Nous voulons construire maintenant un réseau (x) dont la suite $[x]$ s'arrête à (x_1) selon le cas de Goursat et à (x_{-1}) selon le cas de Laplace. On a $k = 0$, $h \neq 0$, $h_1 = 0$ et $x_2 = 0$. En vertu de $k = 0$, l'équation de Laplace de (x) peut être prise sous la forme (no. 63)

$$x_{uv} + a\, x_u = 0.$$

Comme

$$h_1 = 2\, h - \frac{\delta^2 \log h}{\delta u\, \delta v} = 0,$$

on a

$$h = \frac{f'(u)\, \varphi'(v)}{[f(u) + \varphi(v)]^2}$$

Digitized by Google

f et φ étant deux fonctions arbitraires. Par un changement des variables indépendantes, on peut réduire l'expression de h à

$$h = \frac{1}{(u+v)^2}.$$

D'autre part $h = a_u$ donne pour a l'expression

$$a = -\frac{1}{u+v} + \Psi(v),$$

que l'on peut réduire, par une transformation de la forme $x = \lambda(v)\,x'$, à

$$a = -\frac{1}{u+v}$$

On a donc le système

$$x_{uv} - \frac{1}{u+v}\,x_u = , \quad x_2 = 0$$

ou, comme $x_2 = x_{vv}$,

$$x_{uv} - \frac{1}{u+v}\,x_u = 0, \quad x_{vv} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$x = \mathrm{U}'(u+v) - \mathrm{U}.$$

On a ainsi le réseau (x) décrit par le point

$$x^{(i)} = \mathrm{U}'_i\,(u+v) - \mathrm{U}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

les U_i étant des fonctions arbitraires de u, dont la suite $[x]$ satisfait aux conditions posées. De cette suite à 3 termes on peut déduire, à l'aide de la proposition du no. précédent, une suite à 4 termes et ainsi de suite. On peut construire ainsi des suites à un nombre arbitraire de termes qui s'arrêtent selon le cas de Goursat dans un sens et selon le cas de Laplace dans l'autre.

Il s'agit maintenant de prouver que cette construction a donné toutes les suites terminées d'un côté selon le cas de Goursat, de l'autre selon le cas de Laplace, c'est ce que nous ferons dans le no. suivant.

144. Soit (x) un réseau dont la suite est terminée à (x_p) selon le cas de Goursat, à (x_{-q}) selon le cas de Laplace. Nous voulons démontrer que *l'on peut construire une suite* $[y]$, *circonscrite à* $[x]$, *qui soit terminée selon le cas de Goursat dans le sens des courbes v et selon le cas de Laplace dans l'autre sens, et qui ait un terme de moins que* $[x]$.

Prenons le réseau (y) défini par

$$y_u = (\mathrm{S}_u - b\,\mathrm{S})\,x, \quad y_v = \mathrm{S}\,x_1,$$

Digitized by Google

S étant une solution de l'équation

$$S_{uv} - (a\,S)_u - (b\,S)_v + c\,S = 0,$$

adjointe à celle qui est vérifiée par (x). Il est essentiel de remarquer que, la solution S étant choisie, le réseau (y) de E_{n-1} dépend de n constantes arbitraires, que l'on peut ajouter aux coordonnées $y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dans tous les cas la suite $[y]$ est circonscrite à $[x]$.

On définit actuellement les transformés successifs de y comme au no. 139. On a

$$y_1 = -y + S'x_1, \quad y_2 = -y_1 + S''x_2, \quad \ldots, \quad y_{p-1} = -y_{p-2} + S^{(p-1)}x_{p-1}$$

et

$$(16) \qquad y_p = -y_{p-1} + S^{(p)}x_p,$$

avec les relations

$$\frac{\delta y_p}{\delta u} = (S_u^{(p)} - b\,S^{(p)})\,x_{p-1}, \quad \frac{\delta y_p}{\delta v} = S^{(p)}x_{p+1} = 0.$$

Donc:

1. *Si* $S_u^{(p)} - bS^{(p)} \neq 0$, (y_{p-1}) *est un réseau, mais* (y_p) *est une courbe, la suite* $[y]$ *s'arrête à* (y_p) *selon le cas de Goursat.*

2. *Si* $S_u^{(p)} - bS^{(p)} = 0$, (y_p) *est réduit, en général, à un point fixe et* (y_{p-1}) *est un réseau tracé sur un cône, la suite* $[y]$ *s'arrête à* (y_p) *selon le cas mixte. On peut évidemment choisir les constantes additives de y de manière que l'on ait*

$$y_p = 0,$$

alors la relation (16) *prouve que* $(y_{p-1}) \equiv (x_p)$, *donc* $[y]$ *s'arrête à* (y_{p-1}) *selon le cas de Goursat.*

En combinant ce résultat avec celui du no. 139 on voit que en choisissant les fonctions $S^{(i)}$ de manière que l'on ait

$$S_u^{(p)} - b\,S^{(p)} = 0, \quad S_v^{(-q+1)} - a\,S^{(-q+1)} = 0$$

l'existence, en vertu de $h_p = 0$, $k_{-q+1} = 0$, d'une suite $[y]$, circonscrite à $[x]$, terminée à (y_{p-1}) selon le cas de Goursat, à (y_{-q}) selon le cas de Laplace, ayant par conséquent $p + q$ termes (un de moins que $[x]$) est prouvée.

Les suites que nous avons construites au no. 143 sont ainsi les plus générales de leur espèce.

145. *Le cas mixte.* Nous voulons étudier maintenant les suites terminées dans les deux sens, où, dans un des sens aux moins, il se présente le cas mixte.

Faisons tout d'abord une remarque préliminaire. Supposons la suite $[x]$ terminée à (x_p) selon le cas mixte, (x_p) est alors un point fixe. Considérons, comme au no. 137, une suite $[y]$ inscrite dans $[x]$, en partant du réseau

$$y = R\,x_{-1} - R_{-1}\,x.$$

Digitized by Google

On a alors

$$y_p = R_p x_{p-1} - R_{p-1} x_p .$$

Il y a deux cas à considérer:

1. $R_p = o$, ce qui est possible en vertu de $h_p = o$ (no. 136), la suite $[y]$ s'arrête à $(y_p) \equiv (x_p)$.

2. $R_p \neq o$, alors y_p décrit un réseau, mais de

$$y_{p+1} = \frac{\delta R_p}{\delta v} x_p - R_p \frac{\delta x_p}{\delta v},$$

en vertu de (no. 133)

$$\frac{\delta x_p}{\delta v} = a x_p,$$

on tire

$$y_{p+1} = \beta x_p,$$

et cette fois c'est (y_{p+1}) qui se réduit au point fixe x_p.

On peut donc énoncer la proposition suivante:

Si la suite $[x]$ s'arrête dans un sens selon le cas mixte, toute suite inscrite s'arrête dans le même sens selon le même cas. On en conclut qu'il en est de même des suites circonscrites.

Il résulte de là qu'il y a seulement trois cas à considérer: suites terminées dans un sens selon le cas mixte et dans l'autre selon le cas Laplace ou de Goursat, suites terminées dans les deux sens selon le cas mixte.

146. *Suites terminées d'un côté selon les cas mixte, de l'autre selon le cas de Laplace.*

Il est facile de construire le réseau (x) le plus général dont la suite s'arrête à (x_1) selon le cas mixte, à (x_{-1}) selon le cas de Laplace. On a

$$x^{(i)} = U_i + a_i v, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

dont l'équation de Laplace est

$$x_{uv} = o.$$

On démontre, comme au no. 138, que la suite $[\xi]$ du réseau (ξ), où

$$\xi = \begin{vmatrix} U + av & U' & U'' & \ldots & U^{(p-1)} & a & o & o & \ldots & o \\ A_1 + B_1 & A'_1 & A''_1 & \ldots & A_1^{(p-1)} & B'_1 & B''_1 & \ldots & \ldots & B_1^{(q-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m + B_m & A'_m & A''_m & \ldots & A_m^{(p-1)} & B'_m & B''_m & \ldots & \ldots & B_m^{(q-1)} \end{vmatrix},$$

$m = p + q - 2$, s'arrête à (ξ_p) selon le cas mixte et à (ξ_{-q}) selon le cas de Laplace et que c'est la plus générale suite de cette espèce.

Digitized by Google

147. *Suites terminées d'un côté selon le cas mixte, de l'autre selon le cas de Goursat.*

Il est manifeste que par un choix du réseau initial, on peut toujours faire en sorte que la suite $[x]$ s'arrête à (x_{-1}) selon le cas mixte et à (x_p) selon le cas de Goursat. On a alors d'abord

$$(17) \quad \frac{\delta x_{-1}}{\delta u} + a\, x_{-1} = 0$$

avec $k = 0$ (no. 133), et

$$(18) \quad x_{p+1} = 0$$

avec $h_p = 0$ (no. 132). Les équations (17) et (18) forment, avec l'équation de Laplace qui correspond au réseau initial (x), un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, dont l'intégrale générale dépend de $p + 2$ constantes arbitraires, les valeurs pour $u = u_0$, $v = v_0$, de $x, \frac{\delta x}{\delta u}, \frac{\delta x}{\delta v}, \ldots, \frac{\delta^p x}{\delta v^p}$. Ce système admet par conséquent $p + 2$ intégrales linéairement indépendantes, le réseau (x) appartient donc à un espace projectif E_{p+1} à $p + 1$ dimensions.

Remarquons enfin que, d'après le théorème de Goursat (no. 134), il existe $p + 2$ fonctions $A_i(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, p + 2)$ de la variable u, telles que l'on ait

$$(19) \quad \sum_1^{p+2} A_i\, x^{(i)} = \Sigma\, A\, x = 0.$$

Prenons maintenant l'équation de Laplace du réseau (x); en vertu de $k = 0$, on peut l'écrire sous la forme

$$x_{uv} + a\, x_u = 0,$$

d'où

$$x_{-1}^{(i)} = x_u^{(i)} = U_i\, e^{-\int a\, dv}, \quad i = 1, 2. \ldots, p + 2,$$

les U_i étant des fonctions de u, qui en vertu de (17) satisfont à une relation de la forme

$$U' + p(u)\, U = 0,$$

donc $U_i = a_i\, q(u)$, les a_i étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles et q une fonction déterminée de u. On peut donc poser

$$x_u^{(i)} = a_i\, \theta_u(u, v), \quad i = 1, 2, \ldots, p + 2$$

θ étant une fonction déterminée de u et v, d'où

$$x^{(i)} = a_i\, \theta + V_i.$$

La relation (19), ou

$$\theta\, \Sigma\, A\, a + \Sigma\, A\, V = 0,$$

Digitized by Google

donne l'expression de θ. On a donc finalement

$$x^{(i)} = -a_i \cdot \frac{\Sigma A V}{\Sigma A a} + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p+2$$

et nous avons construit le réseau le plus général de E_{p+1} qui s'arrête à (x_{-1}) selon le cas mixte, à (x_p) selon le cas de Goursat.

148. *Suites terminées dans les deux sens selon le cas mixte.* Nous pouvons toujours supposer, comme dans le cas précédent, que la suite $[x]$ est terminée à (x_{-1}) et (x_p). On a alors.

$$k = 0, \quad h_{p-1} = 0$$

et les relations

$$(20) \quad \frac{\delta x_{-1}}{\delta u} + a x_{-1} = 0, \quad \frac{\delta x_p}{\delta v} + \beta x_p = 0,$$

qui sont deux équations linéaires aux dérivées partielles, la première du second ordre, la seconde de l'ordre $p+1$, pour le réseau initial (x). Ces équations forment, avec l'équation de Laplace correspondante, un système complètement intégrable, qui définit, à une projectivité près, le réseau (x) et par conséquent la suite $[x]$.

Comme l'intégrale générale du système dépend de $p+2$ constantes arbitraires, le réseau (x) le plus général, défini par ce système, est situé dans un espace projectif E_{p+1} à $p+1$ dimensions. C'est ce réseau général que nous voulons construire, car les autres en sont des projections sur des espaces à moins de dimensions.

La méthode que nous emploierons est identique à celle du no. précédent. Tout d'abord, en vertu de $k = 0$ et de la première relation (20),

$$x^{(i)} = a_i \theta + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots \quad p+2,$$

où les a_i sont des constantes, les coordonnées du point fixe x_{-1}, les V_i des fonctions de la seule variable v et θ (u, v), une fonction encore inconnue de u et v, qu'il s'agit de déterminer de manière que la seconde relation (20) soit, elle aussi, satisfaite.

Or, en vertu de cette relation, il existe $p+2$ fonctions $A_i(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, p+2)$ de u, telles que l'on ait

$$(21) \quad \Sigma A x = 0.$$

On a donc, comme dans le cas précédent,

$$(22) \quad x^{(i)} = -a_i \frac{\Sigma A V}{\Sigma A a} + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p+2,$$

cependant les fonctions A_i sont soumises ici, comme nous allons le voir, à une restriction. On tire, en effet, de (21) les relations

$$\Sigma A x_1 = 0, \quad \Sigma A x_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A x_{p-1} = 0, \quad \Sigma A x_p = 0,$$

Comme x_p est, par hypothèse, un point fixe, la dernière relation

$$\Sigma A x_p = 0,$$

Digitized by Google

signifie que entre les A_i il y a une relation linéaire et homogène à coefficients constants

$$(23) \quad \Sigma A b = 0.$$

Dans ces conditions le réseau décrit par le point (22) est le plus général, dont la suite $[x]$ est terminée à (x_{-1}) et (x_p) selon le cas mixte.

Il suffit de montrer que x_p est un point fixe. On a, en effet,

$$\Sigma A x_p = 0, \quad \Sigma A' x_p = 0, \quad \Sigma A'' x_p = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(p)} x_p = 0.$$

Comme nous supposons que entre les A_i il y a la *seule* relation (23), les équations précédentes déterminent le point x_p.

Or, on a de (23)

$$\Sigma A b = 0, \quad \Sigma A' b = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma A^{(p)} b = 0,$$

donc

$$x_p^{(i)} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p+2,$$

et la proposition est complètement démontrée.

III. SUITES TERMINÉES À INVARIANTS ÉGAUX.

149. Nous dirons d'une suite de Laplace qui correspond à un réseau à invariants égaux que c'est une *suite à invariants égaux.*

Nous nous occuperons ici des suites à invariants égaux terminées.

Le premier qui ait abordé ce problème, sous sa forme analytique, a été *Moutard*[1]; il a été repris et complété par M. *Darboux*[2]) et, sous forme géométrique, par M. *Bompiani*[3]).

La solution que nous donnerons se rattache en même temps à celle de M. *Darboux*, qu'à celle de M. *Bompiani.*

150. Nous démontrerons d'abord que *toute suite à invariants égaux terminée dans un sens, l'est aussi dans l'autre.*

Soit (x) un réseau à invariants égaux, $h = k$, et supposons que pour le réseau (x_p) de la suite $[x]$ on ait $h_p = 0$, c'est-à-dire que la suite $[x]$ s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat, ou à (x_{p+1}) selon le cas de Laplace ou le cas mixte. Je dis que l'on a alors pour le réseau (x_{-p}) l'invariant $k_{-p} = 0$, c'est-à-dire que la suite $[x]$ s'arrête aussi dans le sens des courbes v.

---

[1]) *Moutard*: Sur la construction des équations de la forme $\frac{1}{z\delta x \delta y} = \lambda$, qui admettent une intégrale générale explicite (Journal de l'École Polyt., cahier 45, 1878).

[2]) *Darboux*: Leçons sur la théorie des surfaces (Tome II, p. 137).

[3]) *Bompiani*: Risoluzione geometrica del problema di Moutard etc. (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, febr. 1915).

Digitized by Google

On a, en effet, d'abord

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} = h - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v},$$

$$k_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial u \partial v} = h - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v},$$

donc $h_1 = k_{-1}$. Admettons que l'on ait

$$k_{-i} = h_i, \quad i \leqslant r,$$

je dis que l'on aura aussi

$$k_{-r-1} = h_{r+1}.$$

On a en effet

$$h_{r+1} = 2h_r - k_r - \frac{\partial^2 \log h_r}{\partial u \partial v} = 2h_r - h_{r-1} - \frac{\partial^2 \log h_r}{\partial u \partial v},$$

$$k_{-r-1} = 2k_{-r} - h_{-r} - \frac{\partial^2 \log k_{-r}}{\partial u \partial v} = 2k_{-r} - k_{-r+1} - \frac{\partial^2 \log k_{-r}}{\partial u \partial v},$$

et, comme $k_{-r} = h_r$, $k_{-r+1} = h_{r-1}$, on a finalement

$$k_{-r-1} = h_{r+1},$$

en particulier

$$k_{-p} = h_p = 0.$$

Nous aurons à étudier trois cas principaux, selon que la suite s'arrête des deux côtés selon le cas de Laplace, des deux côtés selon le cas de Goursat ou d'un côté selon le cas de Laplace de l'autre selon le cas de Goursat. Il faudra ensuite considérer les suites à invariants égaux terminées, dans un sens au moins, selon le cas mixte.

150. *Suites à invariants égaux terminées dans les deux sens selon le cas de Laplace.* Parmi ces suites nous connaissons celles qui ont trois termes, ce sont les suites déduites des réseaux à invariants nuls, dont l'équation de Laplace peut être réduite à la forme simple

$$x_{uv} = 0.$$

On a alors

$$x^{(i)} = U_i + V_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Je me propose de démontrer que *la transformation de Koenigs-Moutard* (no. 84), *appliquée aux suites précédentes, permet d'en déduire, de proche en proche, les suites à invariants égaux les plus générales terminées dans les deux sens selon le cas de Laplace.*

Soit (x) un réseau à invariants égaux dont la suite $[x]$ s'arrête à (x_p) et à (x_{-p}) selon le cas de Laplace. Cette suite a donc $2p + 1$ termes.

Digitized by Google

La nouvelle suite $[x']$ à invariants égaux, obtenue de $[x]$ à l'aide de la transformation de Koenigs-Moutard, revient au fond à ceci: circonscrire à $[x]$ une suite de Laplace arbitraire $[y]$, dans laquelle la suite $[x']$ est, comme la suite $[x]$, inscrite.

Remarquons encore que l'on passe de la suite $[x']$ à $[x]$ par une autre transformation de Koenigs-Moutard.

Pour démontrer la proposition que nous avons en vue, il y a deux points à élucider.

Il faudra montrer d'abord que de toute suite $[x]$ à invariants égaux et à $2p+1$ termes, terminée dans les deux sens selon le cas de Laplace, on peut déduire, à l'aide de la transformation de Koenigs-Moutard, une suite $[x']$, aussi à invariants égaux, à $2p+3$ termes, terminée dans les deux sens, comme $[x]$, selon le cas de Laplace. Cela permettra de tirer d'une suite à trois termes des suites à invariants égaux et à un nombre impair arbitraire de termes.

Il faudra ensuite prouver que de toute suite à invariants égaux et à $2p+1$ termes, on peut tirer une suite à $2p-1$ termes.

151. Soit

$$(24)\quad x_{uv} = h\,x$$

l'équation à invariants égaux vérifiée par le réseau initial (x), dont la suite s'arrête à (x_p) et (x_{-p}) selon le cas de Laplace. On a alors

$$h_{p-1} = k_{-p+1} = 0$$

et les réseaux (x_p) et (x_{-p}) sont réduits à des courbes.

Une suite $[y]$ circonscrite à $[x]$ est déterminée par le réseau (y) vérifiant le système

$$(25)\quad y_u = \mathrm{R}_u\,x,\quad y_v = \mathrm{R}\,x_v,$$

R étant une solution arbitraire de l'équation (24), adjointe à elle-même.

Nous emploierons la méthode donnée au no. 139. On définira les transformés successifs $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ de y, dans le sens des courbes v, à l'aide des relations

$$y_1 + y = \mathrm{R}'\,x_1,\ y_2 + y_1 = \mathrm{R}''\,x_2,\ \ldots,\ y_{p-1} + y_{p-2} = \mathrm{R}^{(p-1)}\,x_{p-1}$$

où l'on a

$$h\,\mathrm{R}' = \mathrm{R}_u,\ h_1\,\mathrm{R}'' = \mathrm{R}'_u,\ \ldots\ldots,\ h_{p-2}\,\mathrm{R}^{(p-1)} = \mathrm{R}_u^{(p-2)},$$

et dans le sens des courbes u

$$y_{-1} + y = \mathrm{R}\,x,\quad y_{-2} + y_{-1} = \mathrm{R}^{(-1)}\,x_{-1},\ \ldots,\quad y_{-p+1} + y_{-p+2} = \mathrm{R}^{(-p+2)}\,x_{-p+2}$$

et

$$y_{-p} + y_{-p+1} = \mathrm{R}^{(-p+1)}\,x_{-p+1},$$

où l'on a

$$k\,\mathrm{R}^{(-1)} = h\,\mathrm{R}^{(-1)} = \mathrm{R}_v,\quad h_1\,\mathrm{R}^{(-2)} = \mathrm{R}_v^{(-1)},\ \ldots,\quad h_{p-2}\,\mathrm{R}^{(-p+1)} = \mathrm{R}_v^{(-p+2)}.$$

Digitized by Google

Ajoutons, pour compléter, les relations

$$\frac{\delta y_i}{\delta u} = R_u^{(i)} x_i, \quad \frac{\delta y^{(i)}}{\delta v} = R^{(i)} x_{i+1}, \quad i = o, 1, 2, \ldots, p-1$$

et

$$\frac{\delta y_{-i}}{\delta u} = R^{(-i+1)} x_{-i}, \quad \frac{\delta y_{-i}}{\delta v} = R_v^{(-i+1)} x_{-i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Maintenant, on peut remarquer qu'il y a une relation étroite entre les fonctions R', R'', ..., $R^{(p-1)}$, $R^{(-1)}$, $R^{(-2)}$, ..., $R^{(-p+1)}$ et les transformées de Laplace R_1, R_2, ..., R_{p-1}, R_{-1}, R_{-2}, ..., R_{-p+2} de la solution R de (24). On a en effet d'abord

$$R' = \frac{R_{-1}}{h}, \quad R^{(-1)} = \frac{R_1}{h}$$

et il est facile de voir, de proche en proche, que l'on a

$$R^{(i)} = \frac{R_{-i}}{h h_1 \ldots h_{i-1}}, \quad R^{(-i)} = \frac{R_i}{h h_1 \ldots h_{i-1}}$$

152. Comme on a

$$\frac{\delta y_{p-1}}{\delta u} = R_u^{(p-1)} x_{p-1}, \quad \frac{\delta y_{p-1}}{\delta v} = R^{(p-1)} x_p$$

et comme d'autre part

$$R_u^{(p-1)} = \frac{R_{-p}}{h h_1 \ldots h_{p-2}},$$

il résulte que l'on a deux cas à considérer:

1. Si $R_{-p} \neq o$, y_{p-1} décrit un réseau dont le transformé de Laplace $(y_p) = \left(\frac{\delta y_{p-1}}{\delta v}\right) \equiv (x_p)$ est une courbe;

2. Si $R_{-p} = o$ c'est (y_{p-1}) qui se réduit à une courbe.

On démontre de la même manière que dans le sens des courbes u on a aussi deux cas:

1. Si $R_p \neq o$, (y_{-p}) est un réseau et $(y_{-p-1}) \equiv (x_{-p})$ est une courbe.

2. Si $R_p = o$, c'est (y_{-p}) qui se réduit à une courbe.

On conclut de là que *si*

$$R_{-p} \neq o, \quad R_p \neq o,$$

la suite $[y]$, *circonscrite à* $[x]$, *a* $2p + 2$ *termes, tandis que si*

$$R_{-p} = o \quad R_p = o,$$

ce qui est possible en vertu de $h_{p-1} = k_{-p+1} = o$, elle n'a que $2p$ termes.

Digitized by Google

153. Appliquons maintenant à (x) la transformation de Koenigs-Moutard (no. 85). On a alors

$$x' = 2y - \mathrm{R}x.$$

Remarquons maintenant que le système (25) fait correspondre à la solution R de (24) la fonction

$$\varrho = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2,$$

dont on peut déduire les fonctions $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{p-1}$, analogues à $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$, à l'aide des relations

$$\varrho_1 + \varrho = \mathrm{R}'\,\mathrm{R}_1,\ \varrho_2 + \varrho_1 = \mathrm{R}''\,\mathrm{R}_2,\ \ldots,\ \varrho_{p-1} + \varrho_{p-2} = \mathrm{R}^{(p-1)}\,\mathrm{R}_{p-1},$$

de même que les fonctions $\varrho_{-1}, \varrho_{-2}, \ldots, \varrho_{-p}$, à l'aide des relations

$$\varrho_{-1} + \varrho = \mathrm{R}^2,\quad \varrho_{-2} + \varrho_{-1} = \mathrm{R}^{(-1)}\,\mathrm{R}_{-1}, \ldots,\quad \varrho_{-p} + \varrho_{-p+1} = \mathrm{R}^{(-p+1)}\,\mathrm{R}_{-p+1}.$$

Cela étant, comme on peut multiplier les coordonnées projectives de x' par un même facteur, on peut prendre d'abord

$$x' = \mathrm{R}y - \varrho x;$$

comme, d'autre part, on a

$$y + y_{-1} = \mathrm{R}x,\ \varrho + \varrho_{-1} = \mathrm{R}^2,$$

on peut finalement prendre

$$x' = \mathrm{R}^2 y - \mathrm{R}\varrho x = \mathrm{R}^2 y - \varrho(y + y_{-1}) = \varrho_{-1} y - \varrho y_{-1}.$$

Posons en général

$$x'_i = \varrho_{i-1} y_i - \varrho_i y_{i-1},\quad i = 0, 1, 2 \ldots, p-1, -1, -2, \ldots, -p+1,$$

il est alors facile de voir que les points

$$x'_i\ (i = -p+1, -p+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, p-1),$$

où $x'_0 \equiv x'$, décrivent des réseaux qui forment une suite de Laplace $[x']$. On a, par exemple, pour $i > o$

$$\frac{\delta x'_i}{\delta u} = \mathrm{R}_u^{(i)}\,\mathrm{R}_u^{(i-1)} \begin{vmatrix} x_i & x_{i-1} \\ \mathrm{R}_i & \mathrm{R}_{i-1} \end{vmatrix},\qquad \frac{\delta x'_i}{\delta v} = \mathrm{R}^{(i)}\,\mathrm{R}^{(i-1)} \begin{vmatrix} x_{i+1} & x_i \\ \mathrm{R}_{i+1} & \mathrm{R}_i \end{vmatrix},$$

d'où l'on tire, en nous bornant à la première

$$\begin{aligned} \frac{\delta x'_i}{\delta u} &= \frac{\mathrm{R}_u^{(i)}}{\mathrm{R}^{(i)}} \cdot \frac{\mathrm{R}_u^{(i-1)}}{\mathrm{R}^{(i-1)}} \begin{vmatrix} y_i + y_{i-1} & y_{i-1} + y_{i-2} \\ \varrho_i + \varrho_{i-1} & \varrho_{i-1} + \varrho_{i-2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{R}_u^{(i)}}{\mathrm{R}^{(i)}} \cdot \frac{\mathrm{R}_u^{(i-1)}}{\mathrm{R}^{(i-1)}} [x'_i + x'_{i-1} + \varrho_{i-2} y_i - \varrho_i y_{i-2}] \\ &= \frac{1}{\varrho_{i-1}} \cdot \frac{\mathrm{R}_u^{(i)}}{\mathrm{R}^{(i)}} \cdot \frac{\mathrm{R}_u^{(i-1)}}{\mathrm{R}^{(i-1)}} \cdot [\mathrm{R}^{(i-1)}\,\mathrm{R}_{i-1}\,x'_i + \mathrm{R}^{(i)}\,\mathrm{R}_i\,x'_{i-1}]. \end{aligned}$$

Digitized by Google

On prouverait de la même manière que l'on a

$$\frac{\delta x'_i}{\delta v} = \frac{1}{\varrho_i} \cdot \frac{R^{(i-1)}}{R^{(i+1)}} \cdot [R^{(i)} R_i \, x'_{i+1} + R^{(i+1)} R_{i+1} \, x'_i].$$

Prenons en particulier le point

$$x_{p-1} = \varrho_{p-2} \, y_{p-1} - \varrho_{p-1} \, y_{p-2}.$$

On a

$$\frac{\delta x'_{p-1}}{\delta u} = R_u^{(p-1)} \, R_u^{(p-2)} \cdot \begin{vmatrix} x_{p-1} & x_{p-2} \\ R_{p-1} & R_{p-2} \end{vmatrix} = \frac{-R_{-p}}{h \, h_1 \ldots h_{p-2}} \cdot \frac{R_{-p+1}}{h \, h_1 \ldots h_{p-3}} \begin{vmatrix} x_{p-1} & x_{p-2} \\ R_{p-1} & R_{p-2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\delta x'_{p-1}}{\delta v} = R^{(p-1)} \, R^{(p-2)} \begin{vmatrix} x_p & x_{p-1} \\ R_p & R_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Il résulte de là que si

$$R_{-p} = 0,$$

x'_{p-1} décrit une courbe qui n'est pas tangente à $x'_{p-2} \, x'_{p-1}$, et la suite $[x']$ s'arrête à (x'_{p-1}). De même si

$$R_p = 0,$$

la suite $[x']$ s'arrête à (x'_{-p+1}). Donc, *si* $R_p = o$, $R_{-p} = o$ *la suite à invariants égaux* $[x']$, *déduite de* $[x]$ *à l'aide de la transformation de Koenigs-Moutard, s'arrête à* (x'_{p-1}) *et* (x'_{-p+1}) *et n'a par conséquent que* $2p - 1$ *termes.*

Comme le système

$$R_{uv} = hR, \; R_p = 0, \; R_{-p} = 0$$

est compatible, en vertu de $h_{p-1} = k_{-p+1} = 0$, on voit que la suite $[x]$ à $2p + 1$ termes peut être déduite, par la transformation de Koenigs-Moutard, d'une suite à $2p - 1$ termes, celle-ci d'une suite à $2p - 3$, et ainsi de suite. On arrive ainsi de proche en proche à une suite à invariants égaux à 3 termes.

154. Bien que, d'après la démonstration précédente, il soit inutile de démontrer que de toute suite à $2p + 1$ termer on peut déduire une autre à $2p + 3$, on peut démontrer aussi cette proposition.

Nous supposerons maintenant

$$R_{-p} \, R_p \neq 0,$$

donc la suite $[y]$, selon le no. 152, est terminée à $(y_p) \equiv (x_p)$ et à $(y_{-p-1}) \equiv (x_{-p})$ et a par conséquent $2p + 2$ termes.

Nous avons, dans le sens des courbes ρ,

$$x'_{p-1} = \begin{vmatrix} y_{p-1} & y_{p-2} \\ \varrho_{p-2} & \varrho_{p-2} \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

donc

$$\frac{\delta x'_{p-1}}{\delta v} = R^{(p-1)} R^{(p-2)} \begin{vmatrix} x_p & x_{p-1} \\ R_p & R_{p-1} \end{vmatrix} = R^{(p-2)} \begin{vmatrix} x_p & y_{p-1} + y_{p-2} \\ R_p & R^{(p-1)} R_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Si l'on prend le point x'_p où la tangente à la courbe v coupe la droite $y_{p-1}\, y_p \equiv y_{p-1}\, x_p$, on trouve

$$x'_p = \varrho_{p-1} \frac{\delta x'_{p-1}}{\delta v} - R_p\, x'_{p-1},$$

où, en supprimant un facteur, on peut prendre

$$x'_p = \varrho_{p-1} R^{(p-2)} x_p - R_p\, y_{p-1}.$$

On prendra enfin

$$x'_{p+1} = R_p \frac{\delta x'_p}{\delta v} - \frac{\delta R_p}{\delta v} x'_p,$$

et on trouvera

$$x'_{p+1} \equiv x_p;$$

la suite $[x']$ s'arrête donc à $(x'_{p+1}) \equiv (x_p)$ selon le cas de Laplace. On verrait de même qu'elle s'arrête à $(x'_{-p-1}) \equiv (y_{-p-1}) \equiv (x_{-p})$. Elle a donc $2p + 3$ termes. Notre proposition est ainsi démontrée en toute rigueur.

155. *Suites à invariants égaux terminées dans les deux sens selon le cas de Goursat.* Soit (x) le réseau à invariants égaux dont la suite s'arrête à (x_p) et (x_{-p}) selon le cas de Goursat. On a alors $h_p = k_{-p} = 0$ et

$$x_{p+1} = 0, \quad x_{-p-1} = 0.$$

Ces deux équations forment avec

$$x_{uv} = hx$$

un système complètement intégrable, qui définit, à une projectivité près, le réseau (x). Ce réseau, par conséquent la suite $[x]$, est situé dans un espace E_{2p} à $2p$ dimensions.

Prenons, comme application le cas $p = 1$. On a alors le système

$$x_{uv} = hx, \quad x_2 = 0, \quad x_{-2} = 0,$$

complètement intégrable, en vertu de

$$h_1 = k_{-1} = h - \frac{\delta^2 \log h}{\delta u\, \delta v} = 0.$$

Or, par un changement des variables indépendantes, on peut prendre

$$h = \frac{2}{(u+v)^2};$$

Digitized by Google

le système précédent devient

$$x_{uv} = \frac{2}{(u+v)^2}\,x, \quad x_{vv} + \frac{2}{u+v}\,x_v = 0, \quad x_{uu} + \frac{2}{u+v}\,x_u = 0.$$

Les deux dernières donnent

$$x_v = \frac{U}{(u+v)^2}, \quad x_u = \frac{V}{(u+v)^2},$$

U et V étant des fonctions de u et de v respectivement, qui doivent satisfaire d'abord à la condition

$$\frac{U'}{(u+v)^2} - \frac{2U}{(u+v)^3} = \frac{V'}{(u+v)^2} - \frac{2V}{(u+v)^3},$$

d'où il est aisé de tirer

$$U = au^2 + 2bu + c, \quad V = av^2 - 2bv + c,$$

a, b, c étant des constantes arbitraire. On constate facilement que l'intégrale générale du système est

$$x = \frac{auv - b\,(u-v) - c}{u+v}.$$

On peut prendre

$$x^{(1)} = \frac{uv}{u+v}, \quad x^{(2)} = \frac{u-v}{u+v}, \quad x^{(3)} = \frac{1}{u+v}$$

ou encore uv, $u - v$, 1. On a ainsi un réseau plan formé par les tangentes d'une conique. Les transformés de Laplace x_1 et x_{-1} sont les points de contact. On a en effet

$$x_1^{(1)} = \frac{u^2}{u+v}, \quad x_1^{(2)} = \frac{-2u}{u+v}, \quad x_1^{(3)} = -\frac{1}{u+v}$$

ou $(u^2, -2u, -1)$ qui est situé sur la conique

$$(X^{(2)})^2 + 4X^{(1)}X^{(3)} = 0;$$

il en est de même de x_{-1}, où

$$x_{-1}^{(1)} = \frac{v^2}{u+v}, \quad x_{-1}^{(2)} = \frac{2v}{u+v}, \quad x_{-1}^{(3)} = -\frac{1}{u+v}.$$

156. Nous allons démontrer que pour la suite $[x]$ générale, déterminée par le système

$$(26) \quad x_{uv} = hx, \quad x_{p+1} = 0, \quad x_{-p-1} = 0,$$

les réseaux (x_1), (x_2), ..., (x_p) *d'un côté*, (x_{-1}), (x_{-2}), ..., (x_{-p}) *de l'autre, sont tous tracés sur un même espace quadratique* Q_{2p-1} *à* $2p-1$ *dimensions de* E_{2p}.

A cet effet définissons les points

$$y_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots, p, -1, -2, \ldots, -p)$$

Digitized by Google

où nous poserons $y_0 \equiv y$, à l'aide des relations suivantes

$$(27)\quad \Sigma y_i x_{-i} = a_i, \quad \Sigma y_i x_k = 0 \quad (k \neq -i), \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots, p-1, -2, \ldots, -p$$

où

$$a_0 = 1,\ a_1 = a_{-1} = -h,\ a_i = a_{-i} = (-1)^i\, h h_1 \ldots h_{i-1},\ (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et où la sommation est faite par rapport aux indices supérieurs, supprimés comme d'habitude.

Il s'agit d'abord de faire voir que *le point y décrit un réseau à invariants égaux qui vérifie le même système* (26) *que* (x).

On a de

$$\Sigma y x = 1, \quad \Sigma y x_i = 0 \quad (i \neq 0)$$

d'abord

$$\Sigma y_u x_i = 0, \quad i \neq 1$$

et

$$\Sigma y_u x_1 = -h,$$

Comme on a de (27)

$$(28)\quad \Sigma y_{-1} x_i = 0, \quad i \neq 1$$

et

$$(29)\quad \Sigma y_{-1} x_1 = -h,$$

on en conclut

$$y_{-1} = y_u.$$

On démontre de la même manière que l'on a

$$y_1 = y_v.$$

On tire de (28) et (29) les relations

$$\Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x_i + \Sigma y_{-1} \frac{\delta x_i}{\delta v} = 0, \quad (i \neq 1),$$

$$\Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x_1 + \Sigma y_{-1} (x_2 - a_1 x_1) = -h_v.$$

La seconde se réduit, en vertu de

$$\Sigma y_{-1} x_2 = 0, \quad a_1 = a - \frac{h_v}{h} = -\frac{h_v}{h},$$

à

$$\Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x_1 = 0;$$

tandis que la première donne pour $i = 0$.

$$\Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x = h$$

Digitized by Google

et pour $i \neq 0$

$$\Sigma \frac{\delta y_{-1}}{\delta v} x_i = 0.$$

On en conclut

$$\frac{\delta y_{-1}}{\delta v} = y_{uv} = hy.$$

Le point y décrit bien un réseau qui a la même équation de Laplace que (x).

Nous allons prouver que les points y_i décrivent les transformés successifs de Laplace de (y). Nous nous bornerons au cas $i > 0$. On a d'abord

$$\Sigma y_i x_{-i} = a_i, \quad \Sigma y_i x_k = 0, \quad k \neq -i, \quad i > 0,$$

d'où

$$\Sigma \frac{\delta y_i}{\delta u} x_{-i} + \Sigma y_i (x_{-i-1} - b_{-i} x_{-i}) = \frac{\delta a_i}{\delta u}$$

ou

$$\Sigma \frac{\delta y_i}{\delta u} x_{-i} = b_{-i} a_i + \frac{\delta a_i}{\delta u} = 0.$$

On trouve de la même manière

$$\Sigma \frac{\delta y_i}{\delta u} x_k = 0, \quad k \neq -i+1$$

et

$$\Sigma \frac{\delta y_i}{\delta u} x_{-i+1} = -a_i.$$

On en conclut

$$\frac{\delta y_i}{\delta u} = \lambda y_{i-1}$$

où

$$\lambda = -\frac{a_i}{a_{i-1}} = h_{i-1},$$

donc

$$\frac{\delta y_i}{\delta u} = h_{i-1} y_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots, p.$$

Un calcul tout pareil au précédent donne

$$\frac{\delta y_i}{\delta v} = y_{i+1} - a_i y_i, \; i = 0, 1, 2, \ldots, p-1,$$

qui prouvent bien que *les points* y_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *décrivent les réseaux d'une suite de Laplace.*

Digitized by Google

Finalement, nous allons démontrer que l'on a

$$\frac{\delta y_p}{\delta v} + a_p\, y_p = 0$$

ou encore

$$y_{p+1} = 0.$$

On tire en effet de

$$\Sigma\, y_p\, x_{-p} = a_p, \quad \Sigma\, y_p\, x_k = 0, \quad k \neq -p$$

d'abord

$$\Sigma \frac{\delta y_p}{\delta v}\, x_{-p} + \Sigma y_p \frac{\delta x_{-p}}{\delta v} = \frac{\delta a_p}{\delta v}$$

ou

$$\Sigma \frac{\delta y_p}{\delta v}\, x_{-p} = \frac{\delta a_p}{\delta v},$$

ensuite

$$\Sigma \frac{\delta y_p}{\delta x_v}\, x_k = 0, \quad k \neq -p.$$

On a alors

$$\frac{\delta y_p}{\delta v} = \mu\, y_p,$$

où

$$\mu = \frac{\delta}{\delta v} log\, a_p = \frac{\delta}{\delta v} log\, hh_1 \ldots h_{p-1}.$$

Or de

$$a_1 = a - \frac{\delta}{\delta v} log\, h = -\frac{\delta}{\delta v} log\, h, \quad a_2 = a_1 - \frac{\delta}{\delta v} log\, h_1, \ldots, a_p = a_{p-1} - \frac{\delta}{\delta v} log\, h_{p-1}$$

on tire

$$a_p = -\frac{\delta}{\delta v} log\, hh_1 \ldots h_{p-1},$$

donc

$$\frac{\delta y_p}{\delta v} + a_p\, y_{p'} = 0$$

ou

$$y_{p+1} = 0.$$

On prouverait de la même manière que les y_i pour $i < 0$ décrivent les réseaux de la même suite $[y]$ et que l'on a

$$y_{-p-1} = 0.$$

Digitized by Google

La proposition annoncée est ainsi complètement démontrée, le réseau (y) vérifie le même système (26) que le réseau donné (x).

Il résulte alors de là que le réseau (y) se déduit de (x) par une projectivité

$$y = \Sigma\, m\, x$$

et comme on a manifestement

$$y_i = \Sigma\, m\, x_i,$$

cette projectivité transforme chaque réseau (x_i) de la suite $[x]$ en un réseau (y_i) de $[y]$.

La relation

$$\Sigma\, y_i\, x_k = 0, \quad k \neq -i$$

devient

$$\Sigma\, m\, x_i\, x_k = 0.$$

Pour $k = i \neq 0$, on a

$$\Sigma\, m\, x_i^{(r)} x_i^{(s)} = 0, \quad i = -p, -p+1, \ldots, -1, +1, 2, \ldots, p$$

qui prouvent que tous les réseaux de la suite $[x]$, sauf le réseau initial (x), sont situés sur l'espace quadratique Q_{2p-1}

$$\Sigma\, m\, X^{(r)} X^{(s)} = 0.$$

157. Nous pouvons supposer l'équation de Q_{2p-1} réduite à la forme

$$\Sigma\, X^2 = 0.$$

On a alors les relations

$$\Sigma\, x_i\, x_{-i} = a_i \neq 0, \quad \Sigma\, x^2 = 1, \quad \Sigma\, x_i\, x_k = 0, \quad k \neq -i,$$

en particulier

$$\Sigma\, x_i^2 = 0, \quad i \neq 0.$$

Nous fixerons maintenant notre attention sur les courbes (x_p) et (x_{-p}), les arrêtes de rebroussement des développables sur lesquelles sont tracées les réseaux (x_p) et (x_{-p+1}) respectivement. Bornons-nous d'abord à (x_p).

Cette courbe est tracée sur l'espace quadratique Q_{2p-1}. Comme on a

$$\Sigma\, x^2_{p-1} = 0, \quad \Sigma\, x_{p-1}\, x_p = 0,$$

la tangente $x_p\, x_{p-1}$ est située aussi sur Q_{2p-1}.

De même, des relations précédentes et de

$$\Sigma\, x^2_{p-2} = 0, \quad \Sigma\, x_{p-2}\, x_{p-1} = 0, \quad \Sigma\, x_{p-2}\, x_p = 0,$$

il résulte que le plan osculateur de (x_p) en x_p appartient aussi à Q_{2p-1}.

Les relations

$$\Sigma x_i\, x_k = 0, \quad 0 < i,\ k \leqslant p$$

prouvent, en général, que les développables $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{p-1}$, attachées à la

Digitized by Google

courbe (x_p), (no. 34), sont toutes situées dans l'espace quadratique Q_{2p-1}. *La courbe* (x_p) *est donc* (no. 36) *autoconjuguée par rapport à* Q_{2p-1}. *Il en est de même de* (x_{-p}).

Cette propriété intéressante a été trouvée, par une voie géométrique ingénieuse, par M. *Bompiani*.

158. Réciproquement, nous nous proposons de démontrer que, à l'aide de deux courbes autoconjuguées de E_{2p}, situées sur le même espace quadratique Q_{2p-1}, on peut construire toute suite à invariants égaux $[x]$, terminée à (x_p) et (x_{-p}) selon le cas de Goursat.

Soient donc (ξ) et (η) les deux courbes autoconjuguées de E_{2p} appartenant au même Q_{2p-1}

$$\Sigma X^2 = 0$$

le long de la première variant la seule variable u, le long de la seconde la seule variable v.

Considérons le L_p-osculateur (no. 33) en ξ à (ξ) et le L_p-osculateur en η à (η). Ces deux espaces linéaires se coupent en un seul point x. Il s'agit de démontrer que ce point décrit un réseau à invariants égaux dont la suite $[x]$ s'arrête à $(x_p) \equiv (\xi)$ et à $(x_{-p}) \equiv (\eta)$.

A cet effet nous remarquerons d'abord que l'on a

$$(28) \quad x = \alpha\,\xi + \alpha_1\,\xi' + \ldots + \alpha_p\,\xi^{(p)} = \beta\,\eta + \beta_1\,\eta' + \ldots + \beta_p\,\eta^{(p)},$$

où les $2p+2$ coefficients α et β sont déterminés, à un facteur près, par les $2p+1$ relations, linéaires et homogènes, concentrées dans l'égalité précédente.

Or, on a

$$\Sigma\,\xi^{(r)}\,\xi^{(s)} = 0, \quad r + s < 0$$

donc, de (28),

$$(29) \quad \Sigma\,\xi\,x = 0, \quad \Sigma\,\xi'\,x = 0, \ldots, \quad \Sigma\,\xi^{(p-1)}\,x = 0$$

et de la même manière

$$(30) \quad \Sigma\,\eta\,x = 0, \ \Sigma\,\eta'\,x = 0, \ \ldots, \ \Sigma\,\eta^{(p-1)}\,x = 0$$

qui définissent les coordonnées $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p+1)$ de x à un facteur près. Comme on a nécessairement

$$\Sigma\,\xi^{(p)}x \neq 0,$$

on peut fixer ce facteur en posant

$$\Sigma\,\xi^{(p)}\,x = 1,$$

posons aussi

$$\Sigma\,\eta^{(p)}\,x = \lambda \neq 0.$$

Digitized by Google

Tout d'abord le raisonnement fait au no. 141 prouve que le point x défini par (29) et (30) décrit un réseau (x), dont la suite s'arrête à (x_p) et (x_{-p}).

Comme on a

$$\Sigma\, \xi\, x_p = 0, \quad \Sigma\, \xi'\, x_p = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma\, \xi^{(2p-1)} x_p = 0,$$

comme, d'autre part,

$$\Sigma\, \xi^2 = 0, \quad \Sigma\, \xi\, \xi' = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma\, \xi\, \xi^{(2p-1)} = 0,$$

il résulte que les points x_p et ξ sont identiques. Il en est de même de x_{-p} et η.

Cela étant établi, il s'agit de démontrer que le réseau (x) est à invariants égaux.

Pour plus de simplicité nous pouvons supposer que l'on a choisi préalablement les facteurs avec lesquels on peut multiplier les coordonnées de ξ et de η, de manière à avoir

$$\Sigma\, [\xi^{(p)}]^2 = 1, \quad \Sigma\, [\eta^{(p)}]^2 = 1.$$

Alors, si l'on introduit la première expression de x de (28) dans

$$\Sigma\, \xi^{(p)}\, x = 1,$$

on obtient

$$a_p = 1,$$

donc

$$\Sigma\, x^2 = 1.$$

Si l'on introduit maintenant la seconde expression de x dans

$$\Sigma\, \eta^{(p)} x = \lambda,$$

on trouve

$$\beta_p = \lambda,$$

donc

$$\Sigma\, x^2 = \lambda^2 = 1.$$

On peut donc prendre $\lambda = 1$. Des relations (29), (30) et de

$$\Sigma\, \xi^{(p)} x = 1, \quad \Sigma\, \eta^{(p)}\, x = 1,$$

on tire successivement

$$\Sigma\, \xi\, x_u = 0, \quad \Sigma\, \xi'\, x_u = 0, \ \ldots, \quad \Sigma\, \xi^{(p-2)}\, x_u = 0, \quad \Sigma\, \xi^{(p-1)}\, x_u = -1,$$
$$\Sigma\, \eta\, x_u = 0, \quad \Sigma\, \eta'\, x_u = 0, \ \ldots, \quad \Sigma\, \eta^{(p-1)}\, x_u = 0, \quad \Sigma\, \eta^{(p)}\, x_u = 0$$

et de là

$$(31) \quad \Sigma\, \xi\, x_{uv} = 0, \quad \Sigma\, \xi'\, x_{uv} = 0, \ \ldots, \quad \Sigma\, \xi^{(p-1)}\, x_{uv} = 0,$$
$$\Sigma\, \eta\, x_{uv} = 0, \quad \Sigma\, \eta'\, x_{uv} = 0, \ \ldots, \quad \Sigma\, \eta^{(p-1)}\, x_{uv} = 0.$$

Digitized by Google

En comparant les égalités (31) avec (29) et (30) on tire

$$x_{uv} = h\,x$$

qui prouve que le réseau (x) est à invariants égaux.

Nous avons trouvé ainsi le moyen de construire la suite à invariants égaux la plus générale terminée dans les deux sens selon le cas de Goursat.

159. *Suites à invariants égaux terminées d'un côté selon le cas de Laplace, de l'autre selon le cas de Goursat.* Supposons que la suite $[x]$ du réseau à invariants égaux (x) s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat. On a alors $h_p = 0$ et (no. 132)

$$x_{p+1} = 0.$$

Comme

$$k_{-p} = h_p = 0,$$

si $[x]$ s'arrête dans le sens des courbes u selon le cas de Laplace, (x_{-p-1}) est une courbe le long de laquelle varie seulement u.

Au point de vue analytique, n solutions du système

$$x_{uv} = h\,x,\quad x_{p+1} = 0,$$

compatible en vertu de $h_p = 0$, déterminent un réseau à invariants égaux dont la suite s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat et à (x_{-p-1}), si $x_{-p-1} \neq 0$ (ce qui est le cas général), selon le cas de Laplace.

Ainsi pour $p = 1$ on a le système (no. 155)

$$x_{uv} = \frac{2}{(u+v)^2}\,x,\quad x_{vv} + \frac{2}{(u+v)^2}\,x_v = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$x = \frac{U}{u+v} - \frac{U'}{2}$$

U étant une fonction arbitraire de u, U' sa dérivée. Comme

$$x_2 = x_{uu} + \frac{2}{u+v}\,x_u = -\frac{U'''}{2},$$

on a le résultat suivant:

Le point x de E_{n-1}, dont les coordonnées ont pour expressions

$$x^{(i)} = \frac{U_i}{u+v} - \frac{U'_i}{2},\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

décrit un réseau à invariants égaux dont la suite s'arrête à (x_1) selon le cas de Goursat et à (x_{-2}) selon le cas de Laplace si le point

$$\xi^{(i)} = U'''_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Digitized by Google

décrit une courbe, c'est-à-dire si les U_i *ne satisfont pas à une équation de la forme* (no. 30)

$$U^{IV} + p(u)\, U''' = 0.$$

Lorsque cette dernière équation a lieu et si $U''' \neq 0$, la suite $[x]$ s'arrête à (x_{-2}) selon le cas mixte. Il est aisé de voir que dans ce cas $[x]$ est contenue dans un E_3 et que l'on peut prendre

$$x^{(1)} = \frac{U}{u+v} - \frac{U'}{2}, \quad x^{(2)} = \frac{u^2}{u+v} - u, \quad x^{(3)} = \frac{u}{u+v} - \frac{1}{2}, \quad x^{(4)} = \frac{1}{u+v}$$

avec $U''' \neq 0$. Alors x_{-2} est le point fixe (1, 0, 0, 0) et la courbe (x_1) est tracée sur le cône quadratique.

$$[X^{(3)}]^2 - X^{(2)} X^{(4)} = 0.$$

Enfin, si les $U_i''' = 0$, on a le cas étudié au no. 155, un réseau plan formé par les tangentes d'une conique.

160. La méthode appliquée aux nos 151 et suiv, peut être aussi employée dans le cas présent.

Il s'agit de démontrer que la suite à invariants égaux la plus générale, terminée d'un côté à (x_p) selon le cas de Goursat, de l'autre à (x_{-p-1}) selon le cas de Laplace, située dans un E_{n-1}, peut être obtenue de la suite particulière du no. précédent, à l'aide de transformations de Koenigs-Moutard.

A cet effet nous montrerons que de la suite donnée $[x]$ à $2p+2$ termes, on peut tirer, à l'aide d'une transformation de Koenigs-Moutard convenablement choisie, une autre suite analogue à $2p$ termes; de celle-ci une nouvelle à $2p-2$ termes et ainsi de suite. Finalement, on s'arrêtera à une suite à 4 termes, qui est la suite particulière obtenue au no. précédent. Réciproquement de celle-ci on obtiendra la suite générale $[x]$.

Soit donc (24) l'équation de Laplace du réseau initial (x), pour lequel on a

$$h_p = k_{-q} = 0$$

et dont la suite s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat, donc (x_p) est une courbe le long de laquelle varie seulement u et on a

$$x_{p+1} = 0,$$

et à (x_{-p-1}) selon le cas de Laplace, donc (x_{-p-1}) est aussi une courbe le long de laquelle aussi varie u.

Cela étant, définissons une suite $[y]$ circonscrite à $[x]$, en partant du réseau (y) qui vérifie le système

$$(32) \quad y_u = R_u\, x, \quad y_v = R\, x_v,$$

Digitized by Google

R étant une solution du système

$$(33)\quad R_{uv} = h\,R,\quad R_{p+1} = 0,\quad R_{-p-1} = 0,$$

compatible en vertu de $h_p = k_{-q} = 0$.

Je dis d'abord que l'on peut choisir les constantes additives de y, arbitraires en vertu de (32), de manière que $[y]$ s'arrête à $(y_{p-1}) \equiv (x_p)$ selon le cas de Goursat et à (y_{-p-1}) selon le cas de Laplace.

Ce résultat devient manifeste à l'aide des relations

$$\frac{\delta y_p}{\delta u} = R_u^{(p)}\, x_p,\quad \frac{\delta y_p}{\delta v} = R^{(p)}\, x_{p+1},$$

où

$$R_u^{(p)} = \frac{R_{-p-1}}{h h_1 \dots h_{p-1}} = 0,\quad x_{p+1} = 0,$$

donc les $y_p^{(i)}$ sont des constantes, et à l'aide des relations

$$y_1 + y = R'\, x_1,\quad y_2 + y_1 = R''\, x_2,\ \dots,\quad y_p + y_{p-1} = R^{(p)}\, x_p,$$

qui montrent que l'on peut choisir les constantes additives de y de manière que $y_p \equiv 0$. On a alors

$$y_{p-1} = R^{(p)}\, x_p$$

et comme

$$y_{p-1} + y_{p-2} = R^{(p-1)}\, x_{p-1},$$

on voit que y_{p-2} est situé sur $x_{p-1}\, x_p$. La suite $[y]$ s'arrête donc visiblement à $(y_{p-1}) \equiv (x_p)$ selon le cas de Goursat.

On a d'autre part

$$\frac{\delta y_{-p-1}}{\delta u} = R^{(-p)}\, x_{-p-1} \neq 0,\quad \frac{\delta y_{-p-1}}{\delta v} = R_v^{(-p)}\, x_{-p} = 0,$$

car

$$R_v^{(-p)} = \frac{R_{p+1}}{h h_1 \dots h_{p-1}} = 0.$$

La suite $[y]$ s'arrête donc bien à (y_{-p-1}) selon le cas de Laplace.

Je dis maintenant qu'en appliquant la transformation de Koenigs-Moutard, comme nous l'avons fait au no. 153, on obtient une suite $[x']$.

Nous avons

$$x'_i = \varrho_{i-1}\, y_i - \varrho_i\, y_{i-1},\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ p,\ -1,\ -2,\ \dots,\ -p,$$

où le point $x'_0 \equiv x'$ décrit le réseau (x') à invariants égaux transformé de (x).

Fixons notre attention sur

$$x'_p = \varrho_{p-1}\, y_p - \varrho_p\, y_{p-1},\quad x'_{-p} = \varrho_{-p-1}\, y_{-p} - \varrho_{-p}\, y_{-p-1}.$$

Digitized by Google

Je dis que l'on peut choisir la solution R du système (33), de manière que l'on ait

$$\varrho_p = 0,$$

qu'alors il s'en suit

$$\varrho_{-p-1} = 0,$$

donc, à cause de $y_p = 0$, on a

$$x'_p = 0, \quad x'_{-p} = -\varrho_{-p}\, y_{-p-1},$$

qui prouvent que la suite $[x']$ s'arrête à (x'_{p-1}) selon le cas de Goursat et à $(x'_{-p}) \equiv y_{-p-1}$ selon le cas de Laplace. Nous montrerons d'ailleurs plus loin que l'on a

$$\frac{\delta x'_{p-1}}{\delta v} = \frac{R^{(p-2)}}{R^{(p)}}\, x'_{p-1},$$

qui montre que x'_{p-1} décrit une courbe le long de laquelle varie seulement u.

Considérons les relations

$$\varrho = \frac{1}{2} R^2,\ \varrho_1 + \varrho = \frac{R_1 R_{-1}}{h},\ \varrho_2 + \varrho_1 = \frac{R_2 R_{-2}}{h h_1},\ \ldots,\ \varrho_p + \varrho_{p-1} = \frac{R_p R_{-p}}{h h_1 \ldots h_{p-1}};$$

$$\varrho_{-1} + \varrho = R^2,\ \varrho_{-2} + \varrho_{-1} = \frac{R_1 R_{-1}}{h},\ \ldots,\ \varrho_{-p-1} + \varrho_{-p} = \frac{R_p R_{-p}}{h h_1 \ldots h_{p-1}},$$

d'où l'on tire successivement

$$\varrho = \varrho_{-1} = \frac{1}{2} R^2,\ \varrho_1 = \varrho_{-2} = \frac{R_1 R_{-1}}{h} - \frac{1}{2} R^2,$$

$$\varrho_2 = \varrho_{-3} = \frac{R_2 R_{-2}}{h h_1} - \frac{R_1 R_{-1}}{h} + \frac{1}{2} R^2, \ldots,$$

finalement

$$\varrho_p = \varrho_{-p-1} = \frac{R_p R_{-p}}{h h_1 \ldots h_{p-1}} - \frac{R_{p-1} R_{-p+1}}{h h_1 \ldots h_{p-2}} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{R_1 R_{-1}}{h} + (-1)^p \frac{1}{2} R^2.$$

On a d'autre part

$$\frac{\delta \varrho_p}{\delta u} = R_u^{(p)} R_p = \frac{R_{-p-1} R_p}{h h_1 \ldots h_{p-1}} = 0,\ \frac{\delta \varrho_p}{\delta v} = R^{(p)} R_{p+1} = 0,$$

qui prouve que l'expression précédente de ϱ_p est une constante.

Or l'intégrale générale du système (33) dépend linéairement de $2p + 1$ constantes arbitraires,

$$R = \sum_1^{2p+1} m_i r_i,$$

r_i ($i = 1, 2, \ldots, 2p + 1$) étant $2p + 1$ solutions particulières du système et les m_i des constantes arbitraires. Alors, la constante ϱ_p est une forme quadratique

Digitized by Google

à coefficients constants de m_i. On peut donc choisir ces constantes d'une infinité de manières, donc la solution R de (33), de manière que l'on ait

$$\varrho_p = \varrho_{-p-1} = 0 .$$

Ajoutons maintenant, pour compléter, que l'on a

$$x'_{p-1} = \varrho_{p-2}\, y_{p-1} - \varrho_{p-1}\, y_{p-2}$$

et comme on a

$$\varrho_{p-1} = R^{(p)} R_p , \quad \varrho_{p-2} = R^{(p-1)} R_{p-1} - R^{(p)} R_p$$

et

$$y_{p-1} = R^{(p)} x_p , \quad y_{p-2} = R^{(p-1)} x_{p-1} - R^{(p)} x_p ,$$

il résulte

$$x'_{p-1} = R^{(p)} R^{(p-1)} \begin{vmatrix} x_p & x_{p-1} \\ R_p & R_{p-1} \end{vmatrix} .$$

On a d'autre part (no. 153)

$$\frac{\delta x'_{p-1}}{\delta v} = R^{(p-1)} R^{(p-2)} \begin{vmatrix} x_p & x_{p-1} \\ R_p & R_{p-1} \end{vmatrix} ,$$

donc

$$\frac{\delta x'_{p-1}}{\delta v} = \frac{R^{(p-2)}}{R^{(p)}} \cdot x'_{p-1} .$$

Ainsi toutes nos affirmations sont complètement justifiées.

161. *Le cas mixte.* Nous venons étudier les cas généraux. Il nous reste à étudier les suites terminées dans un sens au moins selon le cas mixte. Nous avons ainsi à étudier trois nouvelles sortes de suites: suites terminées d'un côté selon le cas de Laplace, de l'autre selon le cas mixte; suites terminées d'un côté selon le cas de Goursat, de l'autre selon le cas mixte; enfin, suites terminées des deux côtés selon le cas mixte.

162. *Suites terminées d'un côté selon le cas de Laplace, de l'autre selon le cas mixte.* Nous avons déjà trouvé (no. 146) une telle suite à trois termes. La suite $[x]$ de E_{n-1} du réseau à invariants égaux (x), décrit par le point

$$x^{(i)} = U_i + a_i v, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

s'arrête à (x_1) selon le cas mixte et à (x_{-1}) selon le cas de Laplace, en supposant que les U_i ne satisfont pas à une équation de la forme

$$U' + p(u).\, U = 0.$$

Je dis que, à l'aide de la transformation de Koenigs-Moutard, on peut tirer de cette suite à trois termes la suite la plus générale, à $2p + 1$ termes, à invariants égaux, terminée d'un côté selon le cas de Laplace, de l'autre selon le cas mixte.

Digitized by Google

Appliquons toujours le méthode du no. 151. Soit (x) un réseau à invariants égaux dont la suite s'arrête à (x_p) selon le cas mixte et à (x_{-p}) selon le cas de Laplace. On a $h_{p-1} = k_{-p+1} = 0$, (x_p) est un point fixe et (x_{-p}) une courbe le long de laquelle varie u.

Considérons la suite $[y]$ circonscrite à $[x]$, déduite à l'aide de la solution R du système

$$R_{uv} = h\,R, \quad R_p = 0, \quad R_{-p} = 0,$$

complètement intégrable en vertu de $h_{p-1} = k_{-p+1} = 0$. On peut choisir les constantes additives arbitraire de y, de manière que $[y]$ s'arrête à $(y_{p-1}) \equiv (x_p)$ selon le cas mixte et à (y_{-p}) selon le cas du Laplace. Ce dernier point est évident en vertu du no. 152.

Prenons

$$\frac{\delta y_{p-1}}{\delta u} = R_u^{(p-1)}\, x_{p-1} = \frac{R_{-p}}{h h_1 \ldots h_{p-2}}\, x_{p-1} = 0, \quad \frac{\delta y_{p-1}}{\delta v} = R^{(p-1)}\, x_p.$$

Comme

$$\frac{\delta x_p}{\delta u} = h_{p-1}\, x_{p-1} = 0, \quad \frac{\delta x_p}{\delta v} = a x_p,$$

on a

$$x_p^{(i)} = a_i\, \theta(v), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

les a_i étant des constantes, donc

$$x_{p-1}^{(i)} = a_i\, \omega(v) + b_i.$$

Le système

$$y_1 + y = R' x_1,\ y_2 + y_1 = R'' x_2,\ \ldots,\ y_{p-1} + y_{p-2} = R^{(p-1)}\, x_{p-1}$$

montre que l'on peut déterminer les constantes que l'on peut ajouter à $y^{(i)}$ de manière que l'on ait $b_i = 0$.

On a alors

$$y_{p-1}^{(i)} = a_i\, \omega(v), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

qui prouve que $y_{p-1} \equiv x_p$. Notre proposition est donc démontrée.

Passons maintenant à la suite $[x']$, obtenue de $[x]$ à l'aide de la transformation de Koenigs-Moutard.

Fixons l'attention sur

$$x'_{p-1} = \varrho_{p-2}\, y_{p-1} - \varrho_{p-1}\, y_{p-2}, \quad x'_{-p+1} = \varrho_{-p}\, y_{-p+1} - \varrho_{-p+1}\, y_{-p}.$$

On démontre comme au no. 160 que l'on peut choisir la solution R de manière que l'on ait

$$\varrho_{p-1} = \varrho_{-p} = 0,$$

Digitized by Google

donc $x'_{p-1} \equiv y_{p-1} = x_p$ est un point fixe et $x'_{-p+1} \equiv y_{-p}$ une courbe le long de laquelle varie u.

Comme la suite $[x']$ n'a que $2p - 1$ termes et s'arrête d'un côté selon le cas mixte, de l'autre selon le cas de Laplace, la réduction annoncée est prouvée.

163. *Suites terminées d'un côté selon le cas de Goursat, de l'autre selon le cas mixte.* Soit (x) le réseau à invariants égaux dont la suite s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat, donc $h_p = 0$ et

$$x_{p+1} = 0.$$

On a alors $k_{-p} = 0$ et la suite doit s'arrêter à (x_{-p-1}) selon le cas mixte, x_{-p-1} étant un point fixe. Les coordonnées de x_{-p-1} satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\delta x_{-p-1}}{\delta u} = a x_{-p-1},$$

qui est la condition nécessaire et suffisante (avec $k_{-p} = 0$) pour que $[x]$ s'arrête à (x_{-p-1}) selon le cas mixte.

Le système complètement intégrable

$$x_{uv} = hx, \quad x_{p+1} = 0, \quad \frac{\delta x_{-p-1}}{\delta u} = a x_{-p-1}$$

montre que le réseau (x) est situé dans un espace E_{2p+1} à $2p + 1$ dimensions.

Cela étant, nous pouvons supposer que pour le point fixe x_{-p-1} on ait

$$x^{(i)}_{-p-1} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p+1), \quad x^{2p+2}_{-p-1} \neq 0.$$

Projetons alors la suite $[x]$ à partir du point x_{-p-1} comme point de vue sur l'espace linéaire

$$X^{(2p+2)} = 0;$$

on obtient une nouvelle suite $[\xi]$ à invariants égaux, dont le réseau initial (ξ) est décrit par le point ξ de coordonnées

$$\xi^{(i)} = x^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p + 1).$$

Comme on a aussi d'abord

$$\xi^{(i)}_p = x^{(i)}_p, \quad \xi^{(i)}_{p+1} = x^{(i)}_{p+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2p + 1$$

il résulte

$$\xi_{p+1} = 0;$$

ensuite de

$$\xi^{(i)}_{-p} = x^{(i)}_{-p}, \quad \xi^{(i)}_{-p-1} = x^{(i)}_{-p-1} \quad i = 1, 2, \ldots, 2p + 1,$$

on tire

$$\xi_{-p-1} = 0.$$

Digitized by Google

On peut donc énoncer la proposition suivante:

La projection d'une suite $[x]$ *à invariants égaux, terminée à* (x_p) *selon le cas de Goursat, à* (x_{-p-1}) *selon le cas mixte, faite du point fixe* x_{-p-1} *comme point de vue, sur un* E_{2p} *est une suite* $[\xi]$ *terminée dans les deux sens selon le cas de Goursat.*

Réciproquement, si (ξ) est un réseau à invariants égaux de E_{2p}, défini par

$$\xi_{uv} = h\,\xi, \quad \xi_{p+1} = 0, \quad \xi_{-p-1} = 0,$$

dont la suite $[\xi]$ est par conséquent terminée à (ξ_p) et (ξ_{-p}) selon le cas de Goursat alors le point x de E_{2p+1}, de coordonnées

$$x^{(i)} = \xi^{(i)}, \; i = 1, 2, \ldots, 2p+1, \; x^{(2p+2)},$$

la dernière coordonnée satisfaisant aux conditions

$$x_{p+1}^{(2p+2)} = 0, \quad x_{-p-1}^{(2p+2)} \neq 0,$$

décrit un réseau à invariants égaux qui s'arrête à (x_p) selon le cas de Goursat et à x_{-p-1} $(0, 0, \ldots, 0, x_{-p-1}^{(2p+2)})$ selon le cas mixte.

On voit donc que dans ce cas la suite $[x]$ est tracée sur un espace quadratique Q_{2p} à point singulier (le point x_{-p-1}).

164. *Suites terminées dans les deux sens selon le cas mixte.* Nous sommes arrivés au dernier cas. Supposons que la suite $[x]$ à invariants égaux s'arrête à (x_{p+1}) selon le cas mixte. On a donc $h_p = k_{-p} = 0$, et alors elle s'arrête selon le même cas à (x_{-p-1}). Le réseau initial (x) est déterminé projectivement par le système linéaire

$$x_{uv} = hx, \; \frac{\delta x_{p+1}}{\delta v} = a x_{p+1}, \; \frac{\delta x_{-p-1}}{\delta u} = \beta x_{-p-1},$$

qui montre que (x) est situé dans un espace projectif E_{2p+2} à $2p+2$ dimensions.

On peut toujours faire de sorte que les deux points fixes x_{p+1} et x_{-p-1} ait pour coordonnées

$$x_{p+1}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2p+2, \quad x_{p+1}^{(2p+3)} \neq 0;$$

$$x_{-p-1}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2p+1, \; 2p+3, \quad x_{-p-1}^{(2p+2)} \neq 0.$$

Projetons alors la suite $[x]$, à partir de la droite fixe x_{p+1} x_{-p-1}, comme droite de vue, sur l'espace linéaire E_{2p}

$$X^{(2p+2)} = 0, \quad X^{(2p+3)} = 0.$$

On obtient ainsi une suite de Laplace $[\xi]$, dont le réseau initial (ξ) est décrit par le point ξ de coordonnées

$$\xi^{(i)} = x^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p+1.$$

Digitized by Google

Comme on a manifestement

$$\xi^{(i)}_{p+1} = x^{(i)}_{p+1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p+1$$
$$\xi^{(i)}_{-p-1} = x^{(i)}_{-p-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p+1,$$

il résulte que ce réseau est défini par le système

$$\xi_{uv} = h\xi, \quad \xi_{p+1} = 0, \quad \xi_{-p-1} = 0,$$

qui prouve que sa suite de Laplace s'arrête à (ξ_p) et à (ξ_{-p}) selon le cas de Goursat.

Réciproquement, on peut construire à l'aide de la suite $[\xi]$ de E_{2p} une suite $[x]$ à invariants égaux qui s'arrête des deux côtés selon le cas mixte. On prend d'abord

$$x^{(i)} = \xi^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2p+1,$$

ensuite $x^{(2p+2)}$ une solution arbitraire de

$$x_{uv} = hx, \quad x_{p+1} = 0$$

pour laquelle $x_{-p-1} \neq 0$, et $x^{(2p+3)}$, une solution quelconque de

$$x_{uv} = hx, \quad x_{-p-1} = 0$$

pour laquelle $x_{p+1} \neq 0$.

Notre problème est ainsi complètement résolu. On voit de plus que la suite $[x]$ est tracée sur un espace quadratique Q_{2p-1} ayant une droite singulière (la droite $x_{-p-1}\ x_{p+1}$).

Bien que le raisonnement précédent suppose que les points x_{p+1} et x_{-p-1} soient distincts, rien n'empêche de les faire coïncider par un passage à la limite. On a alors une suite en même temps terminée dans les deux sens et fermée, mais sur ce point nous reviendrons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE VII.

I. SUITES DE LAPLACE PÉRIODIQUES.

165. *Définition et historique.* Parmi les suites de Laplace il y a une classe remarquable, celle des suites périodiques. Nous appelons ainsi une suite telle que le réseau (x_n) soit identique au réseau initial (x). On aura alors évidemment $(x_{n+i}) \equiv (x_i)$, quelque soit i. Si n est le plus petit entier positif pour lequel on a $(x_n) \equiv (x)$, nous dirons que n est la période de la suite.

C'est M. *Darboux* qui a considéré, analytiquement, pour la première fois les suites périodiques, dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (Tome II, p. 31), où il a étudié les cas $n = 1$ et $n = 2$.

Digitized by Google

C'est toujours M. *Darboux* qui a rencontré le premier exemple géométrique d'un réseau dont la suite est périodique ($n = 4$), sans le reconnaître comme tel, dans les mêmes Leçons (Tome III, p. 472 et suiv.).

Nous avons rencontré pour la première fois les suites périodiques à invariants égaux, pour $n = 3$ et $n = 4$ d'abord (C. R., 30 nov. 1908), pour $n = 6$ ensuite dans un problème de M. *Guichard* (C. R., mars 1913) et nous avons étudié depuis lors le problème général des suites périodiques et de leurs différentes transformations.

On aurait pu introduire à la place de la notion de suite périodique, celle de *suite fermée*, c'est-à-dire celle d'une suite dont un seul terme se confond avec un autre terme de la suite. Une suite fermée peut être périodique ou bien terminée dans les deux sens au même point (selon le cas mixte) ou à la même courbe (d'un côté selon le cas de Goursat, de l'autre selon le cas de Laplace). Nous nous bornerons à la notion plus simple de suite périodique.

166. *Espace ambiant d'une suite périodique.* Soit (x) le réseau initial d'une suite périodique $[x]$ et

$$(1) \quad x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + cx = 0$$

l'équation de Laplace correspondante.

Si n est la période de la suite on devra avoir

$$(2) \quad x_n = m\,x$$

m étant une fonction de u et v. On a alors nécessairement

$$(3) \quad h_n = h, \quad k_n = h_{n-1} = k.$$

Comme on a (no. 65)

$$h_1 = 2\,h - k - (\log h)_{uv},\ h_2 = 2\,h_1 - h - (\log h_1)_{uv},\ \ldots,$$
$$h_n = 2\,h_{n-1} - h_{n-2} - (\log h_{n-1})_{uv},$$

d'où

$$h_n = h - k + h_{n-1} - (\log h\,h_1 \ldots h_{n-1})_{uv},$$

les relations (3) donnent

$$(\log h\,h_1 \ldots h_{n-1})_{uv} = 0$$

ou

$$h\,h_1 \ldots h_{n-1} = UV,$$

U étant une fonction de u, V de v.

Si on change les variables indépendantes et que l'on pose

$$u = \varphi(u'), \quad v = \psi(v'),$$

on a pour les invariants les valeurs

$$h' = h\,\varphi'(u')\,\psi'(v'), \quad h'_1 = h_1\,\varphi'(u')\,\psi'(v'), \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Il en résulte que l'on peut choisir les nouvelles variables, que nous désignerons aussi par u et v, de manière que la relation entre les invariants devienne

$$(4) \quad h\, h_1\, h_2 \ldots h_{n-1} = 1.$$

Calculons maintenant les coefficients a_n, b_n, c_n de l'équation de Laplace qui correspond à (x_n). On a d'abord

$$b_n = b;$$

ensuite, de

$$a_1 = a - \frac{\delta \log h}{\delta v}, \quad a_2 = a_1 - \frac{\delta \log h_1}{\delta v}, \ldots, \quad a_n = a_{n-1} - \frac{\delta \log h_{n-1}}{\delta v},$$

on tire

$$a_n = a - \frac{\delta}{\delta v} \log h\, h_1 \ldots h_{n-1}$$

qui donne, en vertu de (4),

$$a_n = a.$$

Enfin $h_n = h$ ou

$$\frac{\delta a_n}{\delta u} + a_n b_n - c_n = \frac{\delta a}{\delta u} + a\, b - c,$$

devient, en vertu de $a_n = a$, $b_n = b$,

$$c_n = c.$$

On conclut que $x_n = m\, x$ vérifie la même équation de Laplace (1) que x. En introduisant mx dans (1) on obtient

$$m_v\, x_u + m_u\, x_v + (m_{uv} + a\, m_u + b\, m_v)\, x = 0,$$

qui est nécessairement une identité, ce qui donne

$$m = \text{constant}.$$

Réciproquement, si le point x vérifie les équations (1) et (2), où m est une constante, que l'on ait $h_n = h$ et (4), alors il décrit un réseau (x) dont la suite est périodique. Si n est le plus petit entier pour lequel ces conditions sont remplies — ce que nous supposerons constamment dans ce qui suit — n est la période de $[x]$.

On a en effet,

$$x_{n-1} = \frac{\delta x_n}{\delta v} + a_n\, x_n = m\, x_1$$

et en général

$$(5) \quad x_{n+i} = m\, x_i, \quad i > 0.$$

Digitized by Google

Ensuite, de

$$\frac{\delta x_n}{\delta u} = -b\, x_n + h_{n-1}\, x_{n-1}$$

on tire

$$h_{n-1}\, x_{n-1} = m\left(\frac{\delta x}{\delta u} + b\, x\right) = m\, x_{-1}$$

d'où

$$x_{n-1} = \frac{m}{h_{n-1}} \cdot x_{-1},$$

De là on a

$$\frac{\delta x_{n-1}}{\delta u} = -b\, x_{n-1} + h_{n-2}\, x_{n-2} = \frac{m}{h_{n-1}}\,(x_{-2} - b_{-1}\, x_{-1}) + m\left(\frac{1}{h_{n-1}}\right)_u x_{-1}$$

et comme $h_{n-1} = k$ et

$$b_{-1} = b - \frac{k_u}{k},$$

il en résulte

$$x_{n-2} = \frac{m}{h_{n-1}\, h_{n-2}} \cdot x_{-2}.$$

On a ainsi de proche en proche

$$(6) \quad x_{n-i} = \frac{m}{h_{n-1}\, h_{n-2} \ldots h_{n-i}}\, x_{-i} \qquad 0 < i < n.$$

Les relations (2), (5) et (6) sont des équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, vérifiées par les coordonnées du point x, en même temps que l'équation de Laplace (1). Parmi ces équations il y en a une ou deux qui sont d'ordre minimum. Si n est pair, $n = 2\,p$, c'est

$$x_p = \frac{m}{h_{2p-1}\, h_{2p-2} \ldots h_p} \cdot x_{-p},$$

si n est impair, $n = 2\,p + 1$, ce sont les équations

$$x_{p-1} = \frac{m}{h_{2p}\, h_{2p-1} \ldots h_{p+1}} \cdot x_{-p}, \quad x_p = \frac{m}{h_{2p}\, h_{2p-1} \ldots h_p} \cdot x_{p-1}.$$

Dans un cas comme dans l'autre on a avec (1) un système complètement intégrable, dont l'intégrale générale dépend de n constantes arbitraires, ou bien qui admet n solutions linéairement indépendantes.

On peut donc énoncer le résultat suivant:

Toute suite périodique, de période n, est immergée dans un espace projectif E_{n-1} *à* $n - 1$ *dimensions ou est la projection d'une telle suite.*

Digitized by Google

II. SUITE POLAIRE D'UNE SUITE PÉRIODIQUE.

167. Nous pouvons supposer que le réseau initial (x) de la suite périodique $[x]$ soit défini par le système formé par les équations (1) et (2).

Nous allons démontrer que la suite $[y]$, polaire de $[x]$, est elle aussi périodique et qu'elle a la même période n. Un réseau (y) de cette suite est déterminé par les équations

$$(7)\quad \Sigma\, y\, x_1 = 0,\ \Sigma\, y\, x_2 = 0,\ \ldots,\ \Sigma\, y\, x_{n-1} = 0,$$

auxquelles on peut ajouter, pour fixer le coefficient de proportionnalité,

$$(7')\quad \Sigma\, y\, x = 1 \text{ ou } \Sigma\, y\, x_n = m.$$

De cette dernière on tire

$$\Sigma\, y_u\, x = b$$

et de (7)

$$\Sigma\, y_u\, x_1 = -h,\quad \Sigma\, y_u\, x_2 = 0,\ \ldots,\ \Sigma\, y_u\, x_{n-2} = 0.$$

On obtient de la même manière

$$\Sigma\, y_v\, x = a,\ \Sigma\, y_v\, x_1 = 0,\ \Sigma\, y_v\, x_2 = 0,\ \ldots,\ \Sigma\, y_v\, x_{n-1} = 0,\ \Sigma\, y_v\, x_{n-1} = -m$$

et

$$\Sigma\, y_{uv}\, x = a_u + b_v - c + 2\,a\,b,\ \Sigma\, y_{uv}\, x_1 = -a\,h,\ \Sigma\, y_{uv}\, x_2 = 0,\ \ldots,\ \Sigma\, y_{uv}\, x_{n-2} = 0,$$
$$\Sigma\, y_{uv}\, x_{n-1} = -m\,b.$$

De toutes ces relations on déduit les suivantes

$$\Sigma\,(y_{uv} + a'\, y_u + b'\, y_v + c'\, y)\, x = 0,\ \Sigma\,(\ )\, x_1 = 0,\ \ldots,\ \Sigma\,(\ )\, x_{n-1} = 0$$

où

$$a' = -a,\ b' = -b,\ c' = c - a_u - b_v,$$

donc *l'équation de Laplace vérifiée par y est l'adjointe de* (1).

168. Prenons maintenant le premier transformé de Laplace y_1 de y

$$y_1 = y_v + a'y,\quad a' = -a.$$

On a d'abord

$$\Sigma\, y_1\, x = 0,\ \Sigma\, y_1\, x_1 = 0,\ \ldots,\ \Sigma\, y_1\, x_{n-2} = 0,$$

ensuite

$$\Sigma\, y_1\, x_{n-1} = \Sigma\,(y_v + a'\, y)\, x_{n-1} = \Sigma\, y_v\, x_{n-1} = -m.$$

Si nous passons à y_2, on aura

$$y_2 = \frac{\delta\, y_1}{\delta\, v} + a'_1\, y_1,$$

Digitized by Google

où

$$a'_1 = a' - \frac{\delta \log h'}{\delta v},$$

avec

$$a' = -a,\ h' = a'_u + a'\,b' - c' = b_v + a\,b - c = k,$$

donc

$$a'_1 = -a - \frac{\delta \log k}{\delta v},$$

ou encore, parceque $h_{n-1} = k$,

$$a'_1 = -a - \frac{\delta \log h_{n-1}}{\delta v}.$$

On a d'autre part, en vertu de (4)

$$a_{n-1} = a - \frac{\delta}{\delta v} \log h\, h_1 \,..\, h_{n-2} = a + \frac{\delta}{\delta v} \log h_{n-1},$$

donc

$$a'_1 + a_{n-1} = 0.$$

On trouve alors aisément

$$\Sigma y_2 x = 0,\ \Sigma y_2 x_1 = 0,\ \ldots,\ \Sigma y_2 x_{n-3} = 0,\ \Sigma y_2 x_{n-2} = m,\ \Sigma y_2 x_{n-1} = 0.$$

Supposons d'une manière générale que l'on ait

(8) $$\Sigma y_i x = 0,\ \Sigma y_i x_1 = 0,\ \ldots,\ \Sigma y_i x_{n-i} = (-1)^i m,\ \ldots,\ \Sigma y_i x_{n-1} = 0,\ i \geqslant 2$$

et démontrons que l'on a aussi

$$\Sigma y_{i+1}\, x = 0,\ \Sigma y_{i+1}\, x_1 = 0,\ \ldots,\ \Sigma y_{i+1}\, x_{n-i-1} = (-1)^{i+1} m,\ \ldots,\ \Sigma y_{i+1}\, x_{n-1} = 0.$$

On a en effet d'abord

$$\Sigma y_{i+1}\, x = \Sigma\left(\frac{\delta y_i}{\delta v} + a'_i\, y_i\right) x = \Sigma \frac{\delta y_i}{\delta v}\, x$$

$$= -\Sigma y_i \frac{\delta x}{\delta v} = -\Sigma y_i\,(x_1 - a x) = 0.$$

D'une manière plus générale

$$\Sigma y_{i+1}\, x_j = \Sigma\left(\frac{\delta y_i}{\delta v} + a'_i\, y_i\right) x_j,$$

donc, si $j \neq n - i$, on a

$$\Sigma y_{i+1}\, x_j = \Sigma \frac{\delta y_i}{\delta v}\, x_j = -\Sigma y_i \frac{\delta x_j}{\delta v}$$

$$= -\Sigma y_i\,(x_{j+1} - a_j\, x_j) = -\Sigma y_i\, x_{j+1},$$

Digitized by Google

et alors, pour $j \neq n-i$ et $\neq n-j-1$, on a

$$\Sigma y_{i+1}\, x_{\flat} = 0, \quad (j \neq n-i \text{ et } n-j-1)$$

et pour $j = n-i-1$

$$\Sigma y_{i+1}\, x_{n-i-1} = -\Sigma\, y_i\, x_{n-i} = (-1)^{i+1}\, m.$$

Supposons maintenant $j = n-i$, alors

$$\Sigma y_{i+1}\, x_{n-i} = \Sigma\left(\frac{\delta y_i}{\delta v} + a'_i\, y_i\right) x_{n-i} = -\Sigma\, y_i \frac{\delta x_{n-i}}{\delta v} + (-1)^i\, m\, a'_i$$
$$= -\Sigma y_i\,(x_{n-i+1} - a_{n-i}\, x_{n-i}) + (-1)^i\, m\, a'_i$$
$$= (-1)^i\, m\,(a'_i + a_{n-i}).$$

Or, on a

$$a'_i = a' - \frac{\delta}{\delta v} \log h' h'_1 \ldots h'_{i-1},\ a_{n-i} = a - \frac{\delta}{\delta v} \log h\, h_1 \ldots h_{n-i-1},$$

la seconde pouvant s'écrire, en vertu de (4),

$$a_{n-i} = a + \frac{\delta}{\delta v} \log h_{n-i}\, h_{n-i+1} \ldots h_{n-1},$$

donc

$$a'_i + a_{n-i} = -\frac{\delta}{\delta v} \log h'\, h'_1 \ldots h'_{i-1} + \frac{\delta}{\delta v} \log h_{n-i}\, h_{n-i+1} \ldots h_{n-1}.$$

Or je dis que l'on a

$$h' = h_{n-1},\ h'_1 = h_{n-2},\ \ldots,\ h'_{i-1} = h_{n-i}$$

et que par conséquent

$$\Sigma y_{i+1}\ x_{n-i} = 0.$$

La première

$$h' = k = h_{n-1}$$

est déjà connue. On a ensuite

$$h'_1 = 2h' - k' - \frac{\delta^2 \log h'}{\delta u\, \delta v} = 2h_{n-1} - h - \frac{\delta^2 \log h_{n-1}}{\delta u\, \delta v}$$

et comme

$$h_n = h = 2h_{n-1} - h_{n-2} - \frac{\delta^2 \log h_{n-1}}{\delta u\, \delta v},$$

on a

$$h'_1 = h_{n-2}.$$

Admettons que l'on ait

$$h'_r = h_{n-r-1}$$

Digitized by Google

et prouvons que l'on a aussi

$$h'_{r+1} = h_{n-r-2}.$$

Or

$$h'_{r+1} = 2h'_r - h'_{r-1} - \frac{\delta^2 \log h'_r}{\delta u\, \delta v} = 2h_{n-r-1} - h_{n-r} - \frac{\delta^2 \log h_{n-r-1}}{\delta u\, \delta v}$$

et

$$h_{n-r} = 2h_{n-r-1} - h_{n-r-2} - \frac{h^2 \log h_{n-r-1}}{\delta u \delta v},$$

donc

$$h'_{r+1} = h_{n-r-2}.$$

Les relations (8) sont ainsi démontrées pour toute valeur positive de i. Prenons en particulier $i = n$, on a

$$\Sigma y_n\, x = (-1)^n m,\ \Sigma y_n\, x_1 = 0,\ \ldots,\ \Sigma y_n\, x_{n-1} = 0,$$

d'où, en comparant avec (7) et (7′)

$$(9) \qquad y_n = (-1)^n my,$$

qui prouve que *la suite* $[y]$ *est périodique.* La dernière relation prouve que la période n' de $[y]$ est un diviseur de n, comme il en doit être de même de n par rapport à n', on a nécessairement $n' = n$. *Les suites* $[x]$ *et* $[y]$ *ont donc la même période.*

169. *Suites périodiques autopolaires.* En général la suite $[y]$, polaire réciproque de $[x]$, est distincte de celle-ci. On peut se poser la question: *peuvent-elles être identiques?* D'une manière plus précise, peut-on avoir $(y) \equiv (x)$, $(y_1) \equiv (x_1)$, ..., $(y_{n-1}) \equiv (x_{n-1})$?

Evidemment, il faut et il suffit que l'on ait

$$(y) \equiv (x).$$

On doit donc avoir

$$h' = h, \quad k' = k$$

et comme

$$h' = k, \quad k' = h,$$

on a

$$h = k.$$

Il faut donc d'abord que le réseau (x) *soit à invariants égaux.*

Cela étant, on peut supposer dans (1)

$$a = b = 0.$$

Comme on a d'autre part

$$y = \lambda x,$$

Digitized by Google

on tire

$$(\lambda x)_{uv} + c\lambda x = 0$$

ou

$$\lambda_v \, . \, x_u + \lambda_u \, x_v = 0.$$

d'où

$$\lambda_v = \lambda_u = 0$$

ou $\lambda =$ const. et alors (9) donne, à l'aide de (2),

$$(-1)^n = 1.$$

Il faut donc encore que la période n de la suite périodique $[x]$ *à invariants égaux soit un nombre pair.*

Je dis maintenant que les conditions nécessaires trouvées sont en même temps suffisantes.

En effet, nous venons de voir que l'on peut faire en sorte que les réseaux (x) et (y) vérifient le même système (1) et (2). Cela prouve que l'on a

$$y = \Sigma \mu x,$$

les μ étant des constantes à doubles indices, car on a

$$y^{(p)} = \sum_{q=1}^{q=n} \mu_{pq} \, x^{(q)}, \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Le réseau y est donc obtenu de x par une projectivité.

On a d'autre part, à cause de la polarité

$$\Sigma y_i \, x_k = 0, \; k \neq n - i, \; \Sigma y_i \, x_{n-i} = (-1)^i \, m,$$

et comme

$$y_i = \Sigma \mu x_i,$$

il en résulte

$$\Sigma \mu x_i \, x_k = 0, \; k \neq n - i, \; \Sigma \mu x_i \, x_{n-i} = (-1)^i \, m,$$

en particulier, en remarquant que $n = 2p$

$$\Sigma \mu x_1^{\,2} = 0, \; \Sigma \mu x_2^{\,2} = 0, \; \ldots, \; \Sigma \mu x^2_{p-1} = 0, \; \Sigma \mu x^2_{p+1} = 0, \; \ldots, \; \Sigma \mu x^2_{2p-1} = 0$$

mais

$$\Sigma \mu x^2 = 1, \quad \Sigma \mu x_p^{\,2} = (-1)^p \, m,$$

donc *tous les réseaux de la suite, sauf* (x) *et* (x_p), *sont situés sur le même espace quadratique* Q_{n-2} *de* E_{n-1}.

On peut réduire l'équation de cet espace quadratique à la forme

$$\Sigma X^2 = 0$$

Digitized by Google

et alors on a

$$y = \mu x, \quad y_i = \mu x_i,$$

qui prouvent que par rapport à Q_{n-2} la polarité laisse la suite $[x]$ invariable.

On a par conséquent le résultat suivant:

Toute suite périodique et à invariants égaux, appartenant à un espace à un nombre impair de dimensions, est autopolaire.

III. SUITES PÉRIODIQUES INSCRITES ET CIRCONSCRITES À UNE SUITE PÉRIODIQUE.

170. *Suites périodiques inscrites.* Soit R une solution quelconque de l'équation de Laplace (1) qui correspond à un réseau (x) dont la suite est périodique.

Le point z, défini par

$$(10) \quad z = R\,x_1 - R_1\,x,$$

décrit un réseau (z), conjugué à la congruence $(x\,x_1)$ et dont la suite $[z]$ est inscrite dans la suite donnée $[x]$.

En général la suite $[z]$ n'est pas périodique. On a en effet

$$z_n = R_n\,x_{n+1} - R_{n+1}\,x_n = m\,(R_n\,x_1 - R_{n+1}\,x),$$

donc le point z_n est, en général, différent de z.

Remarquons à ce propos que R_n, de même que R_{2n}, R_{3n}, ..., R_{in}, ... sont, tout comme R, des solutions de (1).

Le point z_n se confond avec z si l'on a

$$R_n = m'\,R, \quad R_{n+1} = m'\,R_1.$$

Je dis que $m' = \text{const}$. On a en effet, en dérivant la première de ces relations par rapport à v, la seconde par rapport à u.

$$R_{n+1} - a_n\,R_n = m'\,(R_1 - a\,R) + m'_v\,R,$$
$$-b\,R_{n+1} + h_n\,R_n = m'\,(-b\,R_1 + h\,R) + m'_u\,R_1$$

d'où, en vertu de $a_n = a$, $h_n = h$,

$$m'_u = m'_v = 0, \quad m' = \text{const.}$$

On a ainsi le résultat suivant:

La suite $[z]$ *du réseau décrit par le point* (10), *inscrite dans la suite périodique* $[x]$, *est elle-même périodique et a la même période si* R *est une solution du système formé par* (1) *et*

$$R_n = m'\,R, \quad m' = \text{const.}$$

Dans le cas où R est une solution de (1) et de

$$R_{qn} = m'\,R, \quad m' = \text{const.},$$

a suite $[z]$ est encore périodique, mais alors elle a pour période $n' = qn$.

Digitized by Google

Remarques. a). La constante m' doit être différente de m, autrement la suite $[z]$ devient banale; elle est alors la section de $[x]$ par un hyperplan (no. 117).

b) Si nous prenons deux solutions R′ et R″ de (1), vérifiant respectivement les relations

$$R'_n = m' R', \quad R''_n = m'' R'', \quad m' = \text{const.}, \quad m'' = \text{const.},$$

les réseaux (z') et (z'') décrits par les points

$$z' = R' x_1 - R'_1 x, \quad z'' = R'' x_1 - R''_1 x$$

ont leurs suites périodiques et inscrites dans $[x]$.

Considérons le point ζ, commun aux droites $z' z'_1$ et $z'' z''_1$. Je dis qu'il décrit un réseau (ζ) dont la suite est périodique.

On peut poser en effet

$$\zeta = r z'_1 - r_1 z', \quad \zeta_1 = r_1 z'_2 - r_2 z'_1, \ldots, \quad \zeta_n = r_n z'_{n+1} - r_{n+1} z'_n,$$

ou

$$r = R' R''_1 - R'_1 R'', \quad r_1 = R'_1 R''_2 - R'_2 R''_1, \ldots,$$
$$r_n = R'_n R''_{n+1} - R'_{n+1} R''_n = m' m'' r, \quad r_{n+1} = m' m'' r_1,$$

donc

$$\zeta_n = m m'^2 m'' \zeta.$$

171. *Suites périodiques circonscrites.* Soit $[x]$ une suite périodique, $[y]$ la suite polaire définie au no. 167. Considérons une suite $[\eta]$, inscrite dans $[y]$ et obtenue à l'aide d'une solution S de l'équation de Laplace vérifiée par (y) et adjointe à (1). La suite $[\xi]$, polaire de $[\eta]$, est alors (no. 125) circonscrite à $[x]$.

Si l'on suppose que l'on a

$$S_n = \mu S, \quad \mu = \text{const.} \neq (-1)^n m,$$

alors la suite $[\eta]$ et par conséquence $[\xi]$ est périodique et a la même période n que $[x]$ et $[y]$.

172. On peut trouver une expression intéressante pour les coordonnées du point ξ qui décrit le réseau initial de la suite $[\xi]$.

On a en effet

$$\Sigma \xi \eta_1 = 0, \quad \Sigma \xi \eta_2 = 0, \ldots, \quad \Sigma \xi \eta_{n-1} = 0,$$

qui définissent ξ à un facteur près. Comme on a

$$\eta_1 = S_1 y_2 - S_2 y_1, \quad \eta_2 = S_2 y_3 - S_3 y_2, \ldots, \quad \eta_{n-1} = S_{n-1} y_n - S_n y_{n-1},$$

on en conclut

$$(11) \quad \frac{\Sigma \xi y_1}{S_1} = \frac{\Sigma \xi y_2}{S_2} = \ldots = \frac{\Sigma \xi y_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{\Sigma \xi y_n}{S_n}.$$

Digitized by Google

Or, dans l'espace E_{n-1}, les points x, x_1, ..., x_{n-1} sont linéairement indépendants, on peut donc prendre

$$\xi = \alpha x + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

où il faut déterminer les α de manière que ξ satisfassent à (11). On a donc, en vertu de (8),

$$\frac{-\alpha_{n-1}}{S_1} = \frac{\alpha_{n-2}}{S_2} = \ldots = \frac{(-1)^{n-1}\alpha_1}{S_n} = \frac{(-1)^n \alpha}{S_n}$$

et de là

$$\xi = S_n x - S_{n-1} x_1 + S_{n-2} x_2 - \ldots + (-1)^{n-1} S_1 x_{n-1}.$$

On peut trouver de la même manière ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1}. Calculons en général ξ_p. Des relations

$$\Sigma \xi_p \eta_q = 0, \quad q \neq n - p,$$

on tire, en prenant d'abord $q = 1, 2, \ldots, n - p - 1$

$$(12) \quad \frac{\Sigma \xi_p y}{S} = \frac{\Sigma \xi_p y_1}{S_1} = \ldots = \frac{\Sigma \xi_p y_{n-p}}{S_{n-p}},$$

en prenant ensuite $q = n - p + 1, n - p + 2, \ldots, n - 1$

$$(13) \quad \frac{\Sigma \xi_p y_{n-p+1}}{S_{n-p+1}} = \frac{\Sigma \xi_p y_{n-p+2}}{S_{n-p+2}} = \ldots = \frac{\Sigma \xi_p y_n}{S_n},$$

ces derniers rapports n'étant pas égaux aux premiers.

En posant

$$\xi_p = \beta x + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{p-1} x_{p-1} + \beta_p x_p + \ldots + \beta_{n-1} x_{n-1},$$

on obtient, d'abord de (12)

$$\beta = \lambda m S, \quad \beta_{n-1} = -\lambda S_1, \quad \beta_{n-2} = \lambda S_2, \ldots, \beta_p = (-1)^{n-p} \lambda S_{n-p},$$

ensuite de (13)

$$\beta_{p-1} = (-1)^{n-p+1} \lambda' S_{n-p+1}, \beta_{p-2} = (-1)^{n-p+2} \lambda' S_{n-p+2}, \ldots, \beta = (-1)^n \lambda' S_n$$

donc

$$(-1)^n \lambda' S_n = (-1)^n \lambda' . \mu S = \lambda m S.$$

On peut donc prendre

$$\lambda' = m, \quad \lambda = (-1)^n \mu$$

ou encore $\lambda' = (-1)^n m$, $\lambda = \mu$, donc

$$\xi_p = m S_n x - m S_{n-1} x_1 + \ldots + (-1)^{p-1} m S_{n-p+1} x_{p-1}$$
$$+ (-1)^{n-p} \mu S_{n-p} x_p + (-1)^{n-p-1} \mu S_{n-p-1} x_{p+1} + \ldots + \mu S_2 x_{n-2} - \mu S_1 x_{n-1}$$

qui devient pour $p = n$

$$\xi_n = m\xi,$$

et pour $p = 0$

$$\xi_0 = (-1)^n \mu \xi.$$

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

I. SUITES PÉRIODIQUES À INVARIANTS ÉGAUX.

173. Parmi les suites périodiques celles qui dérivent d'un réseau à invariants égaux jouissent de propriétés spéciales, ce sont d'ailleurs les suites que l'on a rencontrées en premier lieu.

Nous avons déjà vu (no. 169) que les suites à invariants égaux, dont la période n est paire ($n = 2p$) sont autopolaires.

On peut ajouter, ce qui est remarquable, que parmi les réseaux de ces dernières suites ($n = 2p$), il y en a encore un à invariants égaux.

On a en effet les relations (no. 169)

$$\Sigma x_i x_k = 0,\ k \neq 2p-i,\ \Sigma x_i x_{2p-i} = (-1)^i m,$$

donc, en particulier,

$$\Sigma x_i^2 = 1,\ \ \Sigma x_p^2 = (-1)^p m$$

et

$$\Sigma x_i^2 = 0,\ i \neq 0 \text{ et } \neq p.$$

De toute la suite périodique $[x]$ il n'y a que les réseaux (x) et (x_p) qui ne sont pas situés sur l'espace quadratique Q_{2p-2}

$$\Sigma X^2 = 0.$$

Le réseau initial (x) est à invariants égaux. Je dis que l'autre réseau (x_p) l'est aussi.

Il faudra prouver que l'on a

$$h_p = h_{p-1}.$$

Nous avons d'abord la relation fondamentale du no. 166 entre les invariants successifs des réseaux de la suite

$$(1) \quad hh_1 \ldots h_{2p-1} = 1.$$

D'autre part, on a (no. 65)

$$h_i = 2h_{i-1} - h_{i-2} - (\log h_{i-1})_{uv},$$

d'où, en prenant $i = 1, 2, \ldots, i$, en faisant la somme, où il faut remarquer que $h_{-1} = k = h$, on tire

$$(2) \quad h_i = h_{i-1} - (\log hh_1 \ldots h_{i-1})_{uv}.$$

Pour $i = 2p$ cette relation devient

$$h_{2p} = h_{2p-1}$$

ce qui était évident, car ce sont les invariants $h_{2p} = h$, $h_{2p-1} = k$ de $(x_{2p}) \equiv (x)$.

Digitized by Google

Pour $i = 2p - 1$ elle donne

$$h_{2p-1} = h_{2p-2} - (\log hh_1 \dots h_{2p-2})_{uv},$$

d'où, à l'aide de (1) et de $h_{2p-1} = h$, on a

$$h_{2p-2} = h - (\log h)_{uv} = h_1.$$

On a ainsi de proche en proche

$$(3) \quad h_{2p-i} = h_{i-1},\ i = 1, 2, \dots, p,$$

et spécialement

$$h_p = h_{p-1},$$

qui prouve bien que les invariants de (x_p) sont égaux.

174. Les calculs précédents prouvent que pour $n = 2p$ la relation fondamentale (1) devient

$$(hh_1 \dots h_{p-1})^2 = 1,$$

que l'on peut toujours remplacer par

$$(1') \quad hh_1 \dots h_{p-1} = 1.$$

Dans le cas où la période est impaire, $n = 2p + 1$, on a des relations entre les invariants, analogues au précédentes, à savoir

$$(4) \quad h_{2p+1} = h,\ h_{2p} = k = h,\ h_{2p-1} = h_1,\ h_{2p-2} = h_2,\ \dots,\ h_{p+1} = h_{p-1}$$

Dans ce cas il n'y a que le réseau initial (x) qui soit à invariants égaux.

175. Nous allons considérer maintenant quelques exemples particuliers et intéressants de suites périodiques à invariants égaux.

Prenons d'abord le cas $n = 3$. On a une suite $[x]$, composée de trois réseaux, dont le réseau initial (x) est à invariants égaux. Ce réseau est défini, à une projectivité près, par

$$x_{uv} = hx, \quad x_3 = mx,$$

ou encore (no. 166) par

$$x_{uv} = hx, \quad x_2 = \frac{m}{h_2} \cdot x_{-1}, \quad x_1 = \frac{m}{h_2 h_1} \cdot x_{-2}.$$

Or on a de (1)

$$hh_1h_2 = 1,$$

et de (4)

$$h_2 = h,$$

donc

$$h_1 = \frac{1}{h^2} = h - (\log h)_{uv}$$

Digitized by Google

L'invariant h est donc déterminé par l'équation

$$(5) \quad (\log h)_{uv} = h - \frac{1}{h^2},$$

dont l'intégration est la première difficulté du problème. Le réseau (x) s'obtient ensuite en intégrant le système

$$(6) \quad \begin{cases} x_{uu} = \dfrac{h_u}{h} x_u + \dfrac{1}{mh} x_v, \\ x_{uv} = hx, \\ x_{vv} = \dfrac{m}{h} x_u + \dfrac{h_v}{h} x_v, \end{cases}$$

où l'on peut prendre, sans diminuer la généralité du problème, $m = 1$. Le système admet trois solutions linéairement indépendantes, le réseau (x) est donc plan, comme nous le savions déjà.

Nous verrons dans la dernière partie de cet ouvrage (n°s 237 et suiv.) les relations qui existent entre ce réseau et certaines surfaces remarquables de notre espace.

Si l'on prend la solution évidente $h = 1$ de (5), le système (6) s'intègre facilement. On obtient les trois solutions linéairement indépendantes

$$x = e^{\alpha_1(u+\alpha_1 v)}, \quad y = e^{\alpha_2(u+\alpha_2 v)}, \quad z = e^{\alpha_3(u+\alpha_3 v)},$$

α_1, α_2, α_3 étant les trois racines de

$$\alpha^3 = 1.$$

On peut, à l'aide d'une transformation projective, se débarasser des imaginaires qui entrent dans les expressions de x, y et z.

176. Considérons maintenant le cas $n = 4$. On a alors de (1')

$$hh_1 = 1,$$

et de (3).

$$h_3 = h, \quad h_2 = h_1 = \frac{1}{h},$$

donc h est une solution de l'équation bien connue

$$(\log h)_{uv} = h - \frac{1}{h}$$

qui intervient dans la recherche des surfaces à courbure totale constante.

Le réseau initial (x) est défini par le système

$$x_{uv} = hx, \quad x_4 = mx$$

ou encore (no. 166) par

$$x_{uv} = hx, \quad x_2 = \frac{m}{h_3 h_2} x_{-2} = mx_{-2}.$$

Digitized by Google

En prenant $m = 1$, on a le système

$$x_{uu} - x_{vv} = \frac{h_u}{h} x_u - \frac{h_v}{h} x_v,$$

$$x_{uv} = hx$$

qui admet 4 solutions linéairement indépendantes et définit ainsi un réseau (x) d'un E_3. C'est la surface (M), considérée par M. *Darboux* comme généralisation d'une surface minima (*Leçons* etc., Tome III, p. 472).

Les réseaux (x_1) et (x_3) sont situés sur une même quadrique, tandis que les réseaux à invariants égaux (x) et (x_2) ne s'y trouvent pas.

Pour $h = 1$ on a le réseau (x)

$$x^{(1)} = e^{u+v}, \quad x^{(2)} = e^{-u-v}, \quad x^{(3)} = \cos(u-v), \quad x^{(4)} = \sin(u-v),$$

tracé sur la quadrique

$$x^{(1)}x^{(2)} = (x^3)^2 + (x^4)^2.$$

Les réseaux (x_1) et (x_3) sont tracés sur la quadrique

$$-x^{(1)}x^{(2)} = (x^{(3)})^2 + (x^{(4)})^2.$$

On voit ainsi que la suite $[x]$ est, dans ce cas, circonscrite à deux quadriques de notre espace.

Nous rencontrerons dans la dernière partie (chapître XIII, I) le cas $n = 6$, lié à un problème posé pour la première fois par M. *Guichard* et auquel nous avons donné une interprétation géométrique intéressante.

II. THÉORÈME DE WILCZYNSKI.

177. M. *Wilczynski* [1]) a démontré, à l'aide de sa théorie des invariants et des covariants, que pour les réseaux à invariants égaux dont la suite est périodique et $n = 3$, la conique de Koenigs (no. 82 et 83) a en x_1 un contact du quatrième ordre avec la courbe u du réseau (x_1) et un contact du même ordre avec la courbe v du réseau (x_{-1}), c'est-à-dire qu'elle est osculatrice à ces deux courbes.

Nous allons établir un théorème qui comprend celui de M. Wilczynski comme cas particulier.

Considérons un réseau (x) à invariants égaux dont la suite est périodique et à période n quelconque. Nous supposerons de plus que (x) appartient à un espace projectif E_{n-1} à $n-1$ dimensions (no. 166).

Prenons sur la courbe v de (x_{-1}) un point $\bar{x}_{-1}$ voisin de x_{-1}. On a pour ε suffisamment petit

$$\bar{x}_{-1} = x_{-1}(u, v+\varepsilon) = x_{-1} + \varepsilon \frac{\delta x_{-1}}{\delta v} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\delta^2 x_{-1}}{\delta v^2} + \ldots + \frac{\varepsilon^p}{p!} \frac{\delta^p x_{-1}}{\delta v^p} + \ldots.$$

[1]) *Wilczynski:* Math. Ann. Bd. 76, p. 129.

Digitized by Google

Remarquons maintenant que les dérivées successives de x_{-1} par rapport à v peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de x_{-1}, x, x_1, x_2, ..., que les points x_{-1}, x, x_1, ..., x_{n-2} sont linéairement indépendants et que par conséquent on peut poser

$$\bar{x}_{-1} = \alpha\, x + \beta\, x_{-1} + \gamma\, x_1 + \gamma_1\, x_2 + \ldots + \gamma_{n-3}\, x_{n-2}.$$

Les coefficients α, β, γ, γ_1, ..., γ_{n-3} sont les coordonnées projectives de $\bar{x}_{-1}$ par rapport au système fondamental mobile, défini par les points x, x_{-1}, x_1, ..., x_{n-2}.

Par rapport à ce système la conique de Koenigs a pour équations

$$\alpha^2 - 2\,h\,\beta\,\gamma = 0,\quad \gamma_1 = 0,\quad \gamma_2 = 0,\quad \ldots,\quad \gamma_{n-3} = 0,$$

où la première équation représente un espace quadratique Q_{n-2} à $n-2$ dimensions, singulier, admettant comme points singuliers tous les points de l'espace linéaire L_{n-4} à $n-4$ dimensions

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Je dis que *cet espace quadratique, qui passe manifestement par la conique de Koenigs, a avec la courbe v de* (x_{-1}) *un contact de l'ordre* $n+1$. C'est, on le voit, une généralisation du théorème de M. Wilczynski.

178. Nous allons trouver d'abord les expressions de

$$\frac{\delta\, x_{-1}}{\delta\, v}, \frac{\delta^2\, x_{-1}}{\delta\, v^2}, \ldots, \frac{\delta^p\, x_{-1}}{\delta\, v^p}, \ldots$$

à l'aide de

$$x_{-1}, x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

les remplacer dans la valeur de x_{-1}, puis en tenant compte des relations (no. 166) qui existent entre les points x_{-1}, x, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, trouver les expressions de

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma_1, \ldots,\ \gamma_{n-3}.$$

A cet effet nous introduirons la notation suivante

$$h_{i\,v} = \frac{\delta^i\, h}{\delta\, v^i},$$

donc,

$$\frac{\delta\, x_{-1}}{\delta\, v} = x_{uv} = h\, x, \quad \frac{\delta^2 x_{-1}}{\delta\, v^2} = h_v\, x + h\, x_1,$$

ensuite

$$\frac{\delta^3 x_{-1}}{\delta\, v^3} = h_{2v}\, x + \mathrm{A}\, x_1 + h\, x_2,$$

où

$$\mathrm{A} = 3\, h_v.$$

Digitized by Google

On a de la même manière

$$\frac{\delta^4 x_{-1}}{\delta v^4} = h_{3v}\, x + \mathrm{A}'\, x_1 + \mathrm{A}'_1\, x_2 + h\, x_3$$

et en général

$$\frac{\delta^p x_{-1}}{\delta v^p} = h_{(p-1)v}\, x + \mathrm{A}^{(p-3)}\, x_1 + \mathrm{A}_1^{(p-3)}\, x_2 + \ldots + \mathrm{A}_{p-3}^{(p-3)}\, x_{p-2} + h\, x_{p-1}.$$

En dérivant celle-ci, il est aisé d'en déduire la relation suivante

$$\mathrm{A}^{(p-2)} = h_{(p-1)v} + \mathrm{A}_v^{(p-3)} + \frac{h_v}{h}\,\mathrm{A}^{(p-3)}$$

ou encore

$$(7) \quad h\,\mathrm{A}^{(p-2)} = h\, h_{(p-1)v} + [h\,\mathrm{A}^{(p-3)}]_v.$$

Remplaçons maintenant les valeurs précédentes dans la première expression de $\bar{x}_{-1}$, en tenant compte des relations (no. 166)

$$x_{n-1} = \frac{m}{h}\, x_{-1}, \quad x_n = m\, x, \quad x_{n+1} = m\, x_1, \ldots,$$

on trouvera aisément en comparant le résultat à la seconde expression de $\bar{x}_{-1}$

$$\alpha = \varepsilon . h + \frac{\varepsilon^2}{2!} h_v + \frac{\varepsilon^3}{3!} h_{-v} + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!} h_{(n-1)v} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1!)} (h_{nv} + m\, h)$$
$$+ \frac{\varepsilon^{n+2}}{(n+2)!} \left[h_{(n+1)v} + m\, \mathrm{A}_{n-1}^{(n-1)} \right] + \ldots,$$
$$\beta = 1 + m \frac{\varepsilon^n}{n!} + m \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\mathrm{A}_{n-2}^{(n-2)}}{h} + m \frac{\varepsilon^{n+2}}{(n+2)!} \frac{\mathrm{A}_{n-2}^{(n-1)}}{h} + \ldots,$$
$$\gamma = \frac{\varepsilon^2}{2!} h + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathrm{A} + \frac{\varepsilon^4}{4!} \mathrm{A}' + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathrm{A}^{(n-3)} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{A}^{(n-2)}$$
$$+ \frac{\varepsilon^{n+2}}{(n+2)!} [\mathrm{A}^{(n-1)} + m\, h] + \ldots$$

De là nous tirons

$$\alpha^2 - 2\, h\, \beta\, \gamma = \varepsilon^3 \left(h\, h_v - 2\, h\, \frac{\mathrm{A}}{3!} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{h\, h_{2v}}{3!} + \frac{h_v^2}{2!\,2!} + \frac{h_{2v} h}{3!} - 2h \frac{\mathrm{A}'}{4!} \right)$$
$$+ \ldots + \varepsilon^p \left[\frac{h\, h_{(p-2)v}}{1!\,(p-1)!} + \frac{h_v\, h_{(p-3)v}}{2!\,(p-2)!} + \frac{h_{2v}\, h_{(p-4)v}}{3!\,(p-3)!} + \ldots + \frac{h_{(p-2)v}\, h}{(p-1)!\,1!} \right.$$
$$\left. - 2\, h \frac{\mathrm{A}^{(p-3)}}{p!} \right] + \ldots.$$

Digitized by Google

$$+\varepsilon^{(n+1)}\left[\frac{h\,h_{(n-1)v}}{1!\,n!}+\frac{h_v\,h_{(n-2)v}}{2!\,(n-1)!}+\ldots+\frac{h_{(n-1)v}\,h}{n!\,1!}-2h\frac{A^{(n-2)}}{(n+1)!}\right]$$

$$+\varepsilon^{(n+2)}\left[\frac{h\,h_{nv}}{1!\,(n+1)!}+\frac{h_v\,h_{(n-1)v}}{2!\,n!}+\ldots+\frac{h_{nv}\,h}{(n+1)!\,1!}+\frac{2\,m\,h^2}{(n+1)!}\right.$$

$$\left.-2h\left(\frac{A^{(n-1)}+m\,h}{(n+2)!}+\frac{m\,h}{2!\,n!}\right)\right]+\ldots\ldots$$

Je dis maintenant que dans cette expression le coefficient de ε^p est nul pour $p = 3, 4, \ldots, n+1$, c'est-à-dire que l'on a

$$2\,h\,A^{(p-3)}=\frac{p}{1}h\,h_{(p-2)v}+\frac{p(p-1)}{2!}h_v\,h_{(p-3)v}+\frac{p(p-1)\,(p-2)}{3!}h_{2v}\,h_{(p-4)v}+\ldots,$$

ou, en posant

$$h=\theta_v,$$

que l'on a

$$(8)\quad 2\,\theta_v\,A^{(p-3)}+2\,\theta_{pv}\,\theta=\frac{\delta^p}{\delta\,v^p}(\theta^2).$$

Or, pour $p = 3$ cette égalité devient

$$A^{(o)}=A=3\,\theta_{vv}=3\,h_v,$$

que nous avons vue être vraie.

Supposons (8) vérifiée pour $p = 3, 4, \ldots, q < n+1$ et montrons que l'on a aussi

$$2\,\theta_v\,A^{(q-2)}+2\,\theta_{(q+1)v}\,\theta=\frac{\delta^{p+1}}{\delta\,v^{p+1}}(\theta^2).$$

Or celle-ci s'obtient en dérivant (8) par rapport à v et en tenant compte de (7).

Enfin, le coefficient de ε^{n+2} est

$$-\frac{m\,h^2\,n(n+1)}{(n+2)!}\neq 0.$$

On a ainsi

$$\alpha^2-2\,h\,\beta\,\gamma=-\frac{m\,h^2\,n\,(n+1)}{(n+2)}\,\varepsilon^{(n+2)}+\ldots\ldots$$

qui démontre la proposition annoncée.

On démontrerais de la même manière que l'espace quadratique Q_{n-2} a en x_1 avec la courbe u de (x_1) le même contact $n+1$ et la généralisation du théorème de Wilczynski est complètement établie.

Digitized by Google

III. TRANSFORMATIONS DES SUITES PÉRIODIQUES À INVARIANTS ÉGAUX.

179. La recherche des suites périodiques à invariants égaux étant un problème d'intégration très difficile, il est intéressant d'avoir des moyens géométriques de déduire d'une telle suite une infinité d'autres.

Si nous laissons de côté les transformations projectives et duales, que nous connaissons déjà, c'est parmi les transformations de Koenigs-Moutard qu'il faut chercher celles qui conduisent à des suites périodiques. C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

Soit (x) un réseau à invariants égaux identique à son n-ième transformé de Laplace. Pour obtenir un transformé (x') de Koenigs-Moutard de (x), on détermine d'abord une suite $[\xi]$ circonscrite à $[x]$. En supposant que le point x est situé sur $\xi\xi_1$, le conjugué harmonique de x par rapport à $\xi\xi_1$ est précisément le point x', qui décrit le transformé de Koenigs-Moutard de (x). La suite $[x']$ est inscrite, comme $[x]$, dans la suite $[\xi]$.

Si la suite $[x']$ est périodique et a la même période n que $[x]$, je dis qu'il en est de même de $[\xi]$.

En effet, les points x_1 et x'_1 se trouvent sur la droite $\xi_1\xi_2$, x_2 et x'_2 sur $\xi_2\,\xi_3$,.., x_{n-1} et x'_{n-1} sur $\xi_{n-1}\,\xi_n$, enfin x_n et x'_n, c'est-à-dire x et x' sur $\xi_n\,\xi_{n+1}$ qui doit être ainsi confondue avec $\xi\,\xi_1$, ce qui n'est possible que si ξ_n est identique à ξ et par conséquent ξ_{n+1} à ξ_1.

On voit donc que *la suite* $[x']$ *n'est périodique que dans le cas où la suite* $[\xi]$, *circonscrite à* $[x]$, *l'est aussi*; mais cette condition nécéssaire n'est pas toujours suffisante, comme nous le verrons plus loin.

180. Nous étudierons tout d'abord le cas où la période est impaire, $n = 2p + 1$, et nous démontrerons que dans ce cas la condition précédente est en même temps nécessaire et suffisante.

Le réseau (x), identique à son $(2p + 1)$-ième transformé de Laplace, est défini par le système

$$(9)\quad x_{uv} = hx, \quad x_{2p+1} = mx, \quad m = \text{const.}$$

Pour déterminer $[\xi]$ nous employons la méthode donnée au no. 171. A cet effet nous remarquerons que la suite polaire $[y]$ de $[x]$ étant (no. 168) actuellement définie par

$$y_{uv} = h\,y\,,\ y_{2p+1} = -m\,y\,,$$

la solution S des n°s 171 et 172, que nous désignerons ici par R, devra satisfaire au système

$$(10)\quad \mathrm{R}_{uv} = h\,\mathrm{R}\,,\ \mathrm{R}_{2p+1} = \mu\,\mathrm{R}\,,\ \mu = \text{const.} \neq -m.$$

Alors le point ξ qui décrit le réseau initial de $[\xi]$ est donné par (no. 172).

$$\xi = \mathrm{R}_{2p+1}\,x - \mathrm{R}_{2p}\,x_1 + \mathrm{R}_{2p-1}\,x_2 - \ldots + \mathrm{R}_1\,x_{2p}.$$

Digitized by Google

Comme on peut prendre (no. 172)

$$\xi_1 = m\,\mathrm{R}\,x + \mathrm{R}_{2p}\,x_1 - \mathrm{R}_{2p-1}\,x_2 + \ldots - \mathrm{R}_1\,x_{2p},$$

on a

$$\xi + \xi_1 = (\mu + m)\,\mathrm{R}x$$

qui prouve que x est situé sur $\xi\xi_1$.

Le conjugué harmonique x' de x par rapport à $\xi\xi_1$ est alors

$$x' = \frac{1}{2}(\xi - \xi_1) = \frac{\mu - m}{2}\mathrm{R}\,x - \mathrm{R}_{2p}\,x_1 + \mathrm{R}_{2p-1}\,x_2 - \ldots + \mathrm{R}_1\,x_{2p}.$$

Nous savons que ce point décrit un réseau (x') à invariants égaux. Il s'agit de faire voir que l'on a $(x'_{2p+1}) \equiv (x')$.

Dans ce but nous remarquerons qu'un calcul facile, où il faut tenir compte que l'on a

$$h_{2p} = h,\ h_{2p-1} = h_1,\ \ldots,\ h_{2p-q+1} = h_{q-1}$$

et

$$a_{2p-q+1} + a_q = 0,$$

donne

$$x'_u = h.\frac{\mu + m}{2\,m\,\mu}(\mathrm{R}_{2p+1}\,x_{2p} - \mathrm{R}_{2p}\,x_{2p+1}),$$

(11)

$$x'_v = \frac{\mu + m}{2}(\mathrm{R}_1\,x - \mathrm{R}\,x_1)$$

Ces relations prouvent que la suite $[x']$ est circonscrite à la suite $[t]$, dont un réseau est défini par

$$t = \mathrm{R}_1 x - \mathrm{R}x_1.$$

La suite $[t]$ est, en vertu de (10), périodique,

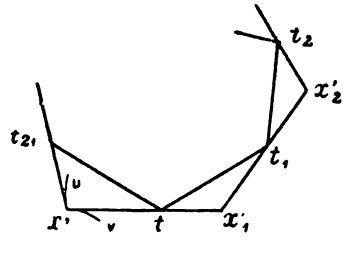
$$(t_{2p+1}) \equiv (t)$$

et l'expression de t montre de plus que $[t]$ est inscrite dans la suite donnée $[x]$.

181. On sait que l'on peut poser (no. 116)

$$t_i = \mathrm{R}_{i+1}\,x_i - \mathrm{R}_i\,x_{i+1}$$

et alors les relations prouvent que la situation géométrique de $[x']$ et $[t]$ peut être représentée par la figure suivante.



Digitized by Google

On peut prendre alors

$$(12)\quad x'_1 = x' + \mathrm{A}\,t,\ x'_2 = x'_1 + \mathrm{A}_1 t_1, \ldots,\ x'_{2p+1} = x'_{2p} + \mathrm{A}_{2p}\, t_{2p}$$

et pour (11)

$$x'_u = \mathrm{B}\, t_{2p},\quad x'_v = \mathrm{C}\, t,\quad \mathrm{B} = h\frac{\mu+m}{2m\mu}.$$

Comme on a

$$\frac{\delta t_i}{\delta u} = \alpha_i t_i + \beta_i t_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, 2p$$

avec

$$\alpha_i = h_{i-1}\frac{\mathrm{R}_{i-1}}{\mathrm{R}_i},\ \beta_i = h_{i-1}\frac{\mathrm{R}_{i+1}}{\mathrm{R}_i}$$

et

$$\frac{\delta t}{\delta u} = \alpha t + \beta t_{2p},\ \alpha = \frac{h}{\mu}\frac{\mathrm{R}_{2p}}{\mathrm{R}},\ \beta = \frac{h}{m\mu}\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}},$$

on tire de (12) d'abord

$$\frac{\delta x'_1}{\delta u} = \mathrm{B}\, t_{2p} + \mathrm{A}_u t + \mathrm{A}(\alpha t + \beta t_{2p}) = \mathrm{B}_1 t$$

où le coefficient de t_{2p} est, d'après la figure, nécessairement nul. On a donc

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_u + \alpha\mathrm{A},\ \mathrm{B} + \mathrm{A}\beta = 0,$$

d'où

$$\mathrm{A} = -\frac{\mu+m}{2}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_1} = -\frac{\mu+m}{2\mu}\frac{\mathrm{R}_{2p+1}}{\mathrm{R}_1}$$

et

$$\mathrm{B}_1 = h\frac{\mu+m}{2\mu}\frac{\mathrm{R}\,\mathrm{R}_{2p+1} - 2\,\mathrm{R}_1\mathrm{R}_{2p}}{\mathrm{R}_1^2}.$$

On a en général

$$\frac{\delta x'_i}{\delta u} = \mathrm{B}_i t_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, 2p+1$$

avec

$$\mathrm{B}_{i+1} = \frac{\delta \mathrm{A}_i}{\delta u} + \alpha_i \mathrm{A}_i,\ \mathrm{B}_i + \beta_i \mathrm{A}_i = 0,$$

ou

$$\beta_{i+1}\mathrm{A}_{i+1} = \frac{\delta \mathrm{A}_i}{\delta u} + \alpha_i \mathrm{A}_i,$$

Digitized by Google

ou encore en remplaçant les valeurs de α_i et β_{i+1}

$$A_{i+1} = -\frac{R_{i+1}}{h_i R_i R_{i+2}} \frac{\delta}{\delta u}(R_i A_i)$$

qui permet de calculer, de proche en proche, les valeurs de $A_1, A_2, \ldots A_{2p}$, connaissant celle de A. On a ainsi

$$A_1 = \frac{\mu+m}{2\mu} \frac{2 R_1 R_{2p} - R R_{2p+1}}{R_1 R_2} = -\frac{\mu+m}{2\mu} \frac{R R_{2p+1} - 2 R_1 R_{2p}}{R_1 R_2},$$

de là

$$A_2 = -\frac{\mu+m}{2\mu} \frac{R R_{2p+1} - 2 R_1 R_{2p} + 2 R_2 R_{2p-1}}{R_2 R_3}$$

et en général

$$(13) \quad A_i = -\frac{\mu+m}{2\mu} \frac{R R_{2p+1} - 2 R_1 R_{2p} + 2 R_2 R_{2p-1} - \ldots + (-1)^i 2 R_i R_{2p-i+1}}{R_i R_{i+1}}$$

d'où, en particulier,

$$A_{2p} = -\frac{\mu+m}{2\mu} \frac{R}{R_{2p}}.$$

Il est aisé de tirer de (13) les relations

$$(14) \quad R_{i+2} A_{i+1} - R_i A_i = (-1)^i . \frac{\mu+m}{\mu} . R_{2p-i}.$$

Tout cela étant établi, on a de (12)

$$\begin{aligned} x'_{2p+1} &= x' + A t + A_1 t_1 + \ldots A_{2p} t_{2p} \\ &= x' + A(R_1 x - R x_1) + A_1(R_2 x_1 - R_1 x_2) + \ldots + A_{2p}(R_{2p+1} x_{2p} - R_{2p} x_{2p+1}) \\ &= x' + A R_1 x - A_{2p} R_{2p} x_{2p+1} + (A_1 R_2 - A R) x_1 + (A_2 R_3 - A_1 R_1) x_2 \\ &\quad + \ldots + (A_{2p} R_{2p+1} - A_{2p-1} R_{2p-1}) x_{2p} \end{aligned}$$

qui devient à l'aide de (14)

$$x'_{2p+1} = x' - \frac{\mu+m}{\mu} x' = -\frac{m}{\mu} x'$$

qui prouve que $(x'_{2p+1}) \equiv (x')$ et que par conséquent la suite $[x']$ est périodique.

182. Nous passons maintenant au cas où la période de la suite $[x]$ est paire, $n = 2p$, et nous allons démontrer qu'il ne suffit plus que la suite $[\xi]$ soit périodique, pour que la suite $[x']$ le soit aussi, mais qu'il faut ajouter une nouvelle condition.

Les calculs sont les mêmes que dans le cas précédent. Nous avons d'abord (no. 172)

$$\xi = R_{2p} x - R_{2p-1} x_1 + R_{2p-2} x_2 - \ldots - R_1 x_{2p-1},$$

$$\xi_1 = \frac{m}{\mu} R_{2p} x - R_{2p-1} x_1 + R_{2p-2} x_2 - \ldots - R_1 x_{2p-1}.$$

Digitized by Google

Si nous remarquons que cette fois-ci on a

$$x_{uv} = h\,x\,,\quad x_{2p} = m\,x\,;$$
$$\mathrm{R}_{uv} = h\,\mathrm{R}\,,\quad \mathrm{R}_{2p} = \mu\,\mathrm{R}\,,\quad \mu \neq m\,,$$

on en conclut

$$\xi - \xi_1 = (\mu - m)\,\mathrm{R}\,x.$$

On peut donc prendre

$$x' = \frac{1}{2}(\xi + \xi_1) = \frac{\mu + m}{2}\,\mathrm{R}\,x - \mathrm{R}_{2p-1}\,x_1 + \mathrm{R}_{2p-2}\,x_2 - \ldots - \mathrm{R}_1\,x_{2p-1}\,.$$

On pourra mettre ici aussi

$$x'_1 = x' + \mathrm{A}\,t,\ x'_2 = x'_1 + \mathrm{A}_1 t_1,\ \ldots,\ x'_{2p} = x'_{2p-1} + \mathrm{A}_{2p-1}\,t_{2p-1}\,,$$

d'où

$$(15)\quad x'_{2p} = x' + \mathrm{A}\,t + \mathrm{A}_1 t_1 + \ldots + \mathrm{A}_{2p-1}\,t_{2p-1}$$

et où, comme précédemment,

$$t_i = \mathrm{R}_{i+1}\,x_i - \mathrm{R}_i\,x_{i+1}\,.$$

Un calcul que nous omettons donne

$$x'_u = \mathrm{B}\,t_{2p+1}\,,$$

avec

$$\mathrm{B} = \frac{\mu - m}{2\,m\,\mu}\,h.$$

On trouve ensuite, en remarquant que l'on a

$$t_u = \alpha\,t + \beta\,t_{2p-1}$$

avec

$$\alpha = \frac{h}{\mu}\,\frac{\mathrm{R}_{2p-1}}{\mathrm{R}}\,,\quad \beta = \frac{h}{m\,\mu}\,\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}}\,,$$

la relation

$$\mathrm{B} + \mathrm{A}\,\beta = 0\,,$$

d'où

$$\mathrm{A} = -\frac{\mu - m}{2}\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_1} = -\frac{\mu - m}{2\,\mu}\cdot\frac{\mathrm{R}_{2p}}{\mathrm{R}_1}\,.$$

On trouvera ensuite, comme au no. 181 la relation générale

$$\mathrm{A}_{i+1} = -\frac{\mathrm{R}_{i+1}}{h_i\,\mathrm{R}_i\,\mathrm{R}_{i+2}}\,\frac{\delta}{\delta\,u}(\mathrm{A}_i\,\mathrm{R}_i)$$

qui permet de calculer, de proche en proche, A_2, A_3,..., A_{2p}. On a ainsi d'abord

$$\mathrm{A}_1 = -\frac{\mu - m}{2\,\mu}\cdot\frac{\mathrm{R}\,\mathrm{R}_{2p} - 2\,\mathrm{R}_1\,\mathrm{R}_{2p-1}}{\mathrm{R}_1\,\mathrm{R}_2}\,,$$

Digitized by Google

ensuite

$$A_2 = -\frac{\mu - m}{2\mu} \cdot \frac{R R_{2p} - 2 R_1 R_{2p-1} + 2 R_2 R_{2p-2}}{R_2 R_3}$$

et en général

$$A_i = -\frac{\mu - m}{2\mu} \frac{R R_{2p} - 2 R_1 R_{2p-1} + 2 R_2 R_{2p-2} - \ldots + (-1)^i 2 R_i R_{2p-i}}{R_i R_{i+1}}$$

d'où en particulier

$$A_{2p-1} = -\frac{\mu - m}{2\mu} \frac{R R_{2p} - 2 R_1 R_{2p-1} + 2 R_2 R_{2p-2} - \ldots + 2 R_{2p-2} R_2 - 2 R_{2p-1} R_1}{R_{2p-1} R_{2p}}$$

On trouve aisément entre A_i et A_{i+1} la relation

$$(16) \quad R_{i+2} A_{i+1} - R_i A_i = (-1)^i \frac{\mu - m}{\mu} R_{2p-i-1}.$$

Cela étant établi, en introduisant dans (15) les valeurs de t_i, on a

$$x'_{2p} = x' + A R_1 x - A_{2p-1} R_{2p-1} x_{2p} + (A_1 R_2 - A R) x_1 + (A_2 R_3 - A_1 R_1) x_2 + \ldots + (A_{2p-1} R_{2p} - A_{2p-2} R_{2p-2}) x_{2p-1}$$

ou, en tenant compte des relations (16),

$$x'_{2p} = x' + A R_1 x - A_{2p-1} R_{2p-1} x_{2p} + \frac{\mu - m}{\mu} (R_{2p-1} x_1 - R_{2p-2} x_2 + \ldots + R_1 x_{2p-1})$$

$$= x' + A R_1 x - A_{2p-1} R_{2p-1} x_{2p} + \frac{\mu - m}{\mu} \left(\frac{\mu + m}{2} R x - x' \right)$$

$$= \frac{m}{\mu} x' + \theta x$$

où

$$\theta = A R_1 - m A_{2p-1} R_{2p-1} + \frac{\mu^2 - m^2}{2\mu} R$$

ou

$$\theta = \frac{m}{\mu} (\mu - m) (R R_{2p} - R_1 R_{2p-1} + R_2 R_{2p-2} - \ldots + R_{2p-2} R_2 - R_{2p-1} R_1).$$

Le réseau (x'), on le voit sur la relation

$$x'_{2p} = \frac{m}{\mu} x' + \theta x,$$

n'a sa suite périodique, $n = 2p$, que dans le cas où la solution R du systéme

$$(17) \quad R_{uv} = h R, \quad R_{2p} = \mu R, \quad \mu = \text{const.} \neq m,$$

annule l'expression θ.

Or, il est facile de vérifier que l'on a

$$\theta_u = 0, \quad \theta_v = 0,$$

Digitized by Google

donc

$$\theta = \text{const.}$$

et si l'on remarque que le système (17) a $2p$ solution linéairement indépendantes $R^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$, alors en prenant

$$R = \sum_{i=1}^{i=2p} \lambda_i R^{(i)},$$

θ deviendra une forme quadratique à coefficients constants par rapport aux constantes arbitraires λ_i. On pourra donc déterminer celles-ci d'une infinité de manières pour que l'on ait

$$\theta = 0$$

et que par conséquent $[x']$ soit périodique.

La transformation des suites périodiques à invariants égaux est ainsi complètement étudiée.

CHAPITRE IX.

I. SUITES DE LAPLACE AUTOPROJECTIVES.

183. Soit $[x]$ une suite de Laplace d'un espace projectif E_{n-1} à $n-1$ dimensions, dans laquelle deux réseaux, (x) et (x_m), sont projectifs l'un de l'autre.

La projectivité Π qui transforme (x) en (x_m), change la droite xx_1 en $x_m x_{m+1}$, donc (x_1) en (x_{m+1}) et, en général (x_i) en (x_{m+i}). La suite $[x]$ reste donc invariante lorsqu'on lui applique Π; elle est *autoprojective* par rapport à Π.

184. Cherchons, à titre d'exemple, les suites telles que (x) et (x_1) soient projectifs. Comme on a

$$x_1 = C \Sigma \lambda x,$$

les λ étant des constantes et comme $\Sigma \lambda x$ est une solution de l'équation de Laplace $L = 0$ qui correspond à (x), on voit que x_1 satisfait à une équation $L_1 = 0$ qui a les mêmes invariants que $L = 0$

$$h_1 = h, \quad k_1 = h = k,$$

d'où

$$(\log h)_{uv} = 0, \quad h = UV.$$

On pourra choisir les variables indépendantes de manière que l'on ait $h = 1$ et alors le réseau (x) de E_{n-1} est déterminé par le systéme (no. 115).

$$x_{uv} = x, \quad x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + ax = 0.$$

Digitized by Google

En écrivant que $\xi = x_1$ satisfait au même système, on trouve aisément que les coefficients a doivent être constants. On en conclut pour les coordonnées de x

$$x^{(i)} = e^{\frac{1}{m_i} u + m_i v}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

les m_i étant les racines de

$$m^n + a_{n-1} \cdot m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a = 0,$$

c'est-à-dire des nombres arbitraires. Pour $n = 4$, on a le réseau

$$x^{(1)} = e^{\frac{1}{m_1} u + m_1 v}, \quad x^{(2)} = e^{\frac{1}{m_2} u + m_2 v}, \quad x^{(3)} = e^{\frac{1}{m_3} u + m_3 v}, \quad x^{(4)} = e^{\frac{1}{m_4} u + m_4 v}$$

tracé sur une surface W

$$x^a y^b z^c t^d = 1, \; a + b + c + d = 0$$

de *Klein-Lie.*

185. L'exemple que nous venons de traiter, intéressant par lui-même, ne donne pas une idée de la méthode qu'il faut employer dans le cas général. Aussi nous étudierons un autre exemple, le cas $m = 2$.

D'une manière plus précise, nous allons étudier les réseaux (x) d'un E_3 projectifs avec leurs seconds transformés de Laplace (x_2).

Si $L = 0$, $L_2 = 0$ sont les équations de Laplace respectives, on devra avoir

$$h_2 = h, \; k_2 = h_1 = k$$

d'où

$$(\log k)_{uv} = 2 (k - h), \; (\log h)_{uv} = 2 (h - k),$$

donc

$$(\log hk)_{uv} = 0, \quad hk = UV,$$

ou, par un changement des variables indépendantes qui ne change pas les courbes du réseau,

$$hk = 1, \quad k = \frac{1}{h}$$

et alors h est donné par [1])

$$(\log h)_{uv} = 2 (h - \frac{1}{h}).$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$a_2 = a - (\log hh_1)_v = a, \; b_2 = b, \; c_2 = c$$

et en général

$$a = a_2 = a_4 = \ldots = a_{2p} = \ldots, \; b = b_2 = b_4 = \ldots = b_{2p} = \ldots, \; c = c_2 = c_4 = \ldots.$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2p+1} = \ldots, \; b_1 = b_3 = \ldots = b_{2p+1} = \ldots = b, \; c_1 = c_3 = c_5 \ldots$$

[1]) Voir *Darboux* (Leçons sur la théorie des surfaces, Tome II, p. 31).

Digitized by Google

Alors, dans la relation

$$x_2 = C\Sigma\lambda x,$$

on a nécessairement C = const. et on peut prendre

$$x_2 = \Sigma\lambda x$$

les λ étant des constantes.

On tire de là

$$x_3 - a_2 x_2 = \Sigma\lambda\ (x_1 - a\,x),$$

d'où

$$x_3 = \Sigma\lambda x_1$$

et ainsi de suite.

Nous allons considérer un premier cas particulier de notre problème. Nous supposerons en premier lieu que le point x_4 se trouve sur la droite xx_2. La projectivité Π qui transforme x en x_2, laissera la droite xx_2 invariante, et elle laissera invariante toute droite qui joint deux points qui se correspondent par Π [2]).

Notre hypothèse se traduit par la relation

$$(1) \quad x_4 = ax + a_1 x_2$$

qui, avec L = o, définit, à une projectivité près, le réseau (x). Comme le réseau (x_2) satisfait au même système, on a

$$(2) \quad x_6 = ax_2 + a_1 x_4.$$

De (1) on tire d'abord, en dérivant par rapport à v,

$$x_5 - ax_4 = a\,(x_1 - ax) + a_1\,(x_3 - ax_2) + \frac{\delta a}{\delta v}\,x + \frac{\delta a_1}{\delta v}\,x_2,$$

ou, à l'aide de (1)

$$(3) \quad x_5 = ax_1 + a_1\,x_3 + \frac{\delta a}{\delta v}\,x + \frac{\delta a_1}{\delta v}\,x_2,$$

d'où, en dérivant encore une fois par rapport à v et en tenant compte de (2) et (3), on trouve une relation de la forme

$$A\,x + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = o,$$

qui doit être une identité, autrement le réseau (x) serait plan (no. 115). On tire de là

$$\frac{\delta a}{\delta v} = \frac{\delta a_1}{\delta v} = o$$

---

[1]) Ce dernier point, qui n'est pas évident, n'intervient pas dans notre démonstration, mais en sera une conséquence.

Digitized by Google

qui réduit (3) à

$$x_5 = a\,x_1 + a_1\,x_3,$$

d'où il résulte que les points x_1, x_3, x_5 sont en ligne droite.

En partant de (2) et en dérivant deux fois par rapport à u, on trouvera

$$\frac{\delta a}{\delta u} = \frac{\delta a_1}{\delta u} = 0,$$

donc les coefficients a et a_1 de (1) sont constants.

Réciproquement, *tout système de la forme*

$$L = 0,\ x_4 = a\,x + a_1\,x_2$$

où les invariants de l'équation $L = 0$ *satisfont aux relations*

$$h\,k = 1,\ (\log h)_{uv} = 2\,(h - \frac{1}{h}),$$

définit un réseau (x) *dont la suite est autoprojective, à savoir* (x_2) *est projectif avec* (x) *et les points* $x, x_2, \ldots, x_{2p}, \ldots$ *d'un côté,* $x_1, x_3, \ldots, x_{2p+1}, \ldots$ de l'autre *sont en ligne droite.*

Evidemment, les points x_{-2}, x_{-4}, $\ldots$, x_{-2p}, $\ldots$ sont, eux aussi, situés sur la droite $x\,x_2$, de même que les points x_{-1}, x_{-3}, $\ldots$, $x_{-2p-1}, \ldots$, sur la droite $x_1\,x_3$.

186. Nous considérerons actuellement un second cas particulier du même problème. Nous supposerons en second lieu que le point x_6 est situé dans le plan déterminé par les points x, x_2 et x_4. Il est alors manifeste qu'il en est de même de tous les points

$$\ldots,\ x_{-2q},\ \ldots,\ x_{-2},\ x,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2p},\ \ldots$$

La démonstration prouvera que les autres points

$$\ldots x_{-2q-1}, \ldots,\ x_{-1},\ x_3, \ldots,\ x_{2p+1}, \ldots$$

sont eux aussi dans un même plan.

On aura ici le système

$$L = 0,\ x_6 = a\,x + a_1\,x_2 + a_2\,x_4$$

qui montre que (x) de E_3 est la projection d'un réseau de E_5.

Considérons enfin le cas général de notre problème. Alors les points x, x_2, x_6 et x_5 sont dans un même E_3, l'espace ambiant de (x), qui sera par conséquent défini par le système

$$L = 0,\ x_8 = a\,x + a_1\,x_4 + a_3\,x_6,$$

d'où il résulte que notre réseau (x) de E, est la projection d'un réseau autoprojectif d'un E_7.

187. Nous pouvons aborder le problème dans toute sa généralité.

Si

$$L = x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0$$

Digitized by Google

est l'équation de Laplace vérifiée par le réseau (x), (x_m) vérifie une équation

$$L_m = x_{uv} + a_m x_u + b_m x_v + c_m x = 0$$

qui a les mêmes invariants

$$h_m = h, \quad k_m = h_{m-1} = k.$$

En raisonnant comme au no. 166 on trouve d'abord

$$h h_1 h_2 \ldots h_{m-1} = 1,$$

ensuite

$$a_m = a, \quad b_m = b, \quad c_m = c.$$

On en conclut que

$$x_m = \Sigma \lambda x,$$

où les λ sont constants. On tire de là

$$x_{m+i} = \Sigma \lambda x_i,$$

donc

$$a_{m+i} = a_i, \quad b_{m+i} = b_i, \quad c_{m+i} = c_i.$$

Nous supposerons maintenant que les points

$$x, x_m, x_{2m}, \ldots, x_{(r+1)m}$$

sont situés dans un même espace linéaire L_r à r dimensions de l'espace projectif qui contient la suite $[x]$.

Le réseau (x) est alors défini par un système de la forme

$$(4) \quad L = 0, \quad x_{(r+1)m} = a x + a^{(1)} x_m + a^{(2)} x_{2m} + \ldots + a^{(r)} x_{rm} = \sum_{i=0}^{i=r} a^i x_{im},$$

qui prouve que l'espace ambiant E_n de la suite $[x]$ est à

$$n = (r+1)m - 1$$

dimensions.

Un raisonnement analogue à celui des nos 185 et 186 conduit à la proposition suivante:

Toute suite autoprojective peut être définie de la manière précédente ou est la projection d'une telle suite.

Pour compléter cette proposition nous allons démontrer que les coefficients $a^{(i)}$ de la seconde équation du système (4) sont constants.

Comme x_m vérifie le même système (4) que x, on a

$$(5) \quad x_{(r+2)m} = \sum_{i=0}^{i=r} a^i x_{(i+1)m}.$$

D'autre part, en dérivant la seconde équation (4) par rapport à v, on a d'abord,

Digitized by Google

en tenant compte de cette équation même

$$x_{(r+1)\,m+1} = \Sigma\, \alpha^i\, x_{im+1} + \Sigma\, a_v^i\, x_{im}.$$

On tirera de la même manière de celle-ci

$$x_{(r+1)\,m+2} = \Sigma\, \alpha^i\, x_{im+2} + 2\,\Sigma\, a_v^i\, x_{im+1} + \Sigma\, \beta^i\, x_{im}\,,$$

les β^i étant des coefficients qui dépendent des α^i.
Finalement on a

$$x_{(r+2)m} = \sum_0^r \alpha^i\, x_{(i+1)m} + m \sum_0^r a_v^i\, x_{(i+1)\,m-1} + \ldots + \sum_0^r \mu^i\, x_{im}.$$

L'équation (5) prouve qu'on devra avoir

$$(6) \quad m\,\Sigma\, a_v^i\, x_{(i+1)\,m-1} + \ldots + \Sigma\, \mu^i\, x_{im} = 0\,,$$

ce qui est une relation linéaire entre les points

$$x,\ x_m,\ x_{2m},\ldots,\ x_{rm},\ x_1,\ x_{m+1},\ldots,\ x_{rm+1},\ldots,\ x_{m-1},\ x_{2m-1},\ldots,\ x_{(r+1)\,m-1}\,,$$

ou encore entre les points

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ldots,\ x_{2m},\ x_{2m+1},\ldots,\ x_{(r+1)\,m-1}\,,$$

qui ne peut pas exister car ces points sont linéairement indépendants, la suite $[x]$ appartenant à un $E_{(r+1)\,m-1}$. La relation (6) est donc une identité et on a en particulier

$$a_v^i = 0\,, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ r.$$

Si nous partons maintenant de (5) et que nous dérivions par rapport à u, on trouvera d'abord

$$x_{(r+2)\,m-1} = \Sigma\, \alpha^i\, x_{(i+1)\,m-1} + \frac{1}{h_{m-1}}\,\Sigma\, a_u^i\, x_{(i+1)m}\,,$$

de là

$$x_{(r+2)\,m-2} = \Sigma\, \alpha^i\, x_{(i+1)\,m-2} + \frac{1}{h_{m-2}}\,\Sigma\, a_u^i\, x_{(i+1)\,m-1} + \Sigma\, \beta^i\, x_{(i+1)m}$$

et finalement, de proche en proche,

$$x_{(r+1)m} = \Sigma\, \alpha^i\, x_{im} + \frac{1}{h}\,\Sigma\, a_u^i\, x_{im+1} + \ldots + \Sigma\, \gamma^i\, x_{(i+1)\,m}$$

ou en tenant compte de (4)

$$(7) \quad \frac{1}{h}\,\Sigma\, a_u^i\, x_{im+1} + \ldots + \Sigma\, \gamma^i\, x_{(i+1)\,m} = 0$$

où

$$\gamma^0 = \alpha^0, \quad \gamma^i = \mu^{i-1} + \mu^r\, \alpha^i.$$

Digitized by Google

La relation (7) doit être une identité, donc

$$a_u^i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r.$$

Nous avons démontré par conséquent que l'on a

$$a^i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r.$$

188. L'espace linéaire L_r à r dimensions qui contient les points

$$x, \; x_m, \; x_{2m}, \ldots, \; x_{rm}, \; x_{(r+1)m},$$

contient évidemment tous les points x_{im}, quelque soit l'entier i positif ou négatif.

Si l'on remarque maintenant que de (4) on tire

$$x_{(r+1)m+1} = a\, x_1 + a^1 x_{m+1} + \ldots + a^r x_{rm+1},$$

il résulte que les points

$$x_1, \; x_{m+1}, \ldots, \; x_{rm+1}, \; x_{(r+1)m+1}$$

et par conséquent tous les x_{im+1} sont situés dans un autre espace linéaire à r dimensions L'_r.

En général les points

$$x_{im+p}, \quad 0 \leqslant p < m$$

sont, quelque soit l'entier i positif ou négatif, situé dans un espace linéaire $L_r^{(p)}$.

On peut donc énoncer la proposition fondamentale suivante:

Les points x_j qui décrivent les réseaux (x_j) d'une suite autoprojective $[x]$ sont distribués dans m espaces linéaires L_r, L'_r, ..., $L_r^{(m-1)}$, variables avec ces points, d'une manière précise, les points

$$x_j, \; j \equiv p \pmod{m}$$

appartiennent à $L_r^{(p)}$.

Le même calcul qui nous a conduit à cette proposition fondamentale permet de vérifier que la suite $[x]$, définie par le système (4) où les coefficients a_i sont constants, est autoprojective.

On a en effet

$$x_{(r+2)m} = a\, x_m + a^1 x_{2m} + \ldots + a\; x_{(r+1)m}$$

et, comme x_m vérifie $L = 0$, on voit que x_m satisfait au système (4), ce qui prouve que (x_m) s'obtient de (x) par une projectivité Π.

189. Il est intéressant de remarquer que la projectivité Π qui laisse la suite $[x]$ invariante, laisse invariant chacun des espaces linéaires mobiles L_r, L'_r, ... $L^{(m-1)}$; elle se réduit par conséquent pour chacun de ces espaces à une projectivité dans cet espace même. Cette remarque nous servira pour établir une autre propriété fondamentale des suites autoprojectives.

Digitized by Google

La suite autoprojective $[x]$ étant définie par la système (4), posons

$$y = Ax + A_1 x_m + \ldots + A_r x_{rm},$$

les A_i étant des constantes arbitraires. Je dis que le point y, qui appartient visiblement à l'espace linéaire mobile L_r, décrit un réseau dont la suite est autoprojective.

Nous avons d'abord

$$y_v = A(x_1 - ax) + A_1(x_{m+1} - ax_m) + \ldots + A_r(x_{rm+1} - ax_{rm}),$$

car

$$a_m = a_{2m} = \ldots = a_{rm} = a,$$

donc

$$y_v + ay = Ax_1 + A_1 x_{m+1} + \ldots + A_r x_{rm+1}.$$

Ensuite

$$(y_v + ay)_u = A(-bx_1 + hx) + A_1(-bx_{m+1} + hx_m) + \ldots + A_r(-bx_{rm+1} + hx_{rm});$$

car

$$h_m = h_{2m} = \ldots = h_{rm} = h.$$

donc

$$y_{uv} + ay_u + by_v + cy = 0,$$

qui prouve que y décrit un réseau.

On a maintenant

$$y_1 = y_v + ay = Ax_1 + A_1 x_{m+1} + \ldots + A_r x_{rm+1}$$

et, de proche en proche

$$y_m = Ax_m + A_1 x_{2m} + \ldots + A_r x_{(r+1)m}.$$

Or, nous avons

$$x_m = \Sigma\lambda x, \quad x_{2m} = \Sigma\lambda x_m, \ \ldots, \ x_{(r+1)m} = \Sigma\lambda x_{rm},$$

donc

$$y_m = \Sigma\lambda y,$$

c'est-à-dire, la même projectivité qui change x en x_m, transforme y en y_m.

Il est aisé de voir que les points

$$y_{im+p}$$

sont, quel que soit i dans le même espace linéaire, $L_r^{(p)}$, que les points x_{im+p}.

Il est maintenant facile de trouver la projectivité de l'espace L_r qui transforme y en y_m.

Digitized by Google

A cet effet remarquons que A, A_1,..., A_r sont les coordonnées projectives de y dans L_r par rapport aux points fondamentaux x, x_m, ..., x_{rm}. Soient A', A'_1,... A'_r les coordonnées analogues de y_m, on a

$$y_m = A'x + A'_1 x_m + \ldots + A'_r x_{rm}.$$

On a d'autre part

$$y_m = Ax_m + A_1 x_{2m} + \ldots + A_r x_{(r+1)m},$$

ou, en remplaçant $x_{(r+1)m}$ par sa valeur tirée de (4),

$$y_m = aA_r x + (A + a_1 A_r)x_m + (A_1 + a_2 A_r) x_{2m} + \ldots + (A_{r-1} + a_r A_r) x_{rm}.$$

donc

$$A' = aA_r, \quad A'_1 = A + a_1 A_r, A'_2 = A_1 + a_2 A_r, \ldots, A'_r = A_{r-1} + a_r A_r,$$

est la projectivité cherchée dans L_r, qui change y en y_m.

On peut obtenir facilement l'équation qui détermine les points doubles de cette projectivité. En posant

$$A' = SA, \quad A'_1 = SA_1, \ldots, A'_r = SA_r,$$

on a le système

$$SA - aA_r = 0, \quad -A + SA_1 - a_1 A_r = 0, \quad -A_1 + SA_2 - a_2 A_r = 0,$$
$$\ldots, \quad -A_{r-1} + (S - a_r)A_r = 0,$$

dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} S & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a \\ 0 & S & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & S & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & S & -a_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & S - a_r \end{vmatrix} = S^{r+1} - a_r S^r - a_{r-1} S^{r-1} - \ldots - a_1 S - a = 0.$$

Je dis maintenant que chacun de ces $r + 1$ points doubles décrit un réseau dont la suite est périodique.

Soit z un point double. On a

$$z = Ax + A_1 x_m + \ldots + A_r x_{rm},$$
$$z_m = A'x + A'_1 x_m + \ldots + A'_r x_{rm} = Sz,$$

donc z est défini par le système

$$z_{uv} + az_u + bz_v + cz = 0, \quad z_m = Sz,$$

il décrit bien un réseau dont la suite est périodique.

On a donc la proposition fondamentale suivante: *Dans l'espace linéaire* L_r qui *contient les points* x_{im} *il y a en général* $r + 1$ *points qui décrivent des réseaux périodiques dont la période est* m.

Digitized by Google

Remarquons encore que le transformé de Laplace z_1 du point double z est situé dans l'espace L'_r, le point z_2 dans L''_r,..., le point z_{m-1} dans $L_r^{(m-1)}$.

Nous avons enfin que la suite $[z]$, périodique et de période m, est contenue dans un espace linéaire à $m-1$ dimensions (no. 166). On peut donc énoncer le résultat suivant:

Les m espaces linéaires L_r, L'_r,..., $L_r^{(m-1)}$, *variables avec u et v, rencontrent, en général,* $r+1$ *espaces linéaires fixes à* $m-1$ *dimensions.*

II. SUITES INSCRITES DANS UNE SUITE AUTOPROJECTIVE.

190. Si R est une solution arbitraire de l'équation de Laplace $L = o$, vérifiée par un réseau (x) dont la suite est autoprojective, alors le point

$$y = Rx_1 - R_1 x$$

décrit le réseau initial d'une suite $[y]$ inscrite dans $[x]$. En général, la suite $[y]$ n'est pas autoprojective. Il s'agit de choisir la solution R de manière que $[y]$ soit autoprojective et que (y_m) soit projectif de (y).

Je dis d'abord que si R est une solution du système

$$(8)\quad R_{uv} + aR_u + bR_v + cR = o, \quad R_m = \mu R, \quad \mu = \text{const.},$$

(y_m) est projectif de (y).

On a en effet, à un facteur près,

$$y_m = R_m x_{m+1} - R_{m+1} x_m = \mu(Rx_{m+1} - R_1 x_m),$$

or

$$x_m = \Sigma\lambda x, \qquad x_{m+1} = \Sigma\lambda x_1,$$

donc

$$y_m = \mu\Sigma\lambda y$$

qui justifie notre affirmation.

191. Nous allons démontrer que *si l'on suppose que la suite* $[y]$ *jouit des mêmes propriétés que* $[x]$, *à savoir que les points*

$$y, y_m, \ldots, y_{rm}, y_{(r+1)m}$$

appartiennent à un même L_r, *alors* R *est nécessairement* une solution du système (8).

On a par hypothèse

$$y_{(r+1)m} = \beta y + \beta_1 y_m + \ldots + \beta_r y_{rm}$$

ou

$$R_{(r+1)m} x_{(r+1)m+1} - R_{(r+1)m+1} x_{(r+1)m} = \beta(Rx_1 - R_1 x)$$
$$+ \beta_1 (R_m x_{m+1} - R_{m+1} x_m) + \ldots + \beta_r (R_{rm} x_{rm+1} - R_{rm+1} x_{rm}).$$

Digitized by Google

Remplaçons dans cette dernière égalité $x_{(r+1)m}$ et $x_{(r+1)m+1}$ par leurs valeurs (no. 187)

$$x_{(r+1)m} = ax + a_1 x_m + \ldots + a_r x_{rm},$$
$$x_{(r+1)m+1} = ax_1 + a_1 x_{m+1} + \ldots + a_r x_{rm+1};$$

on obtient une équation qui doit être une identité, autrement $[x]$ serait contenue dans un espace à moins de

$$n = (r+1)m - 1$$

dimensions (no. 187), ce que nous ne supposons pas.

On a ainsi

$$R_{(r+1)m} = \frac{\beta}{a} R = \frac{\beta_1}{a_1} R_m = \ldots = \frac{\beta_r}{a_r} R_{rm},$$
$$R_{(r+1)m+1} = \frac{\beta}{a} R_1 = \frac{\beta_1}{a_1} R_{m+1} = \ldots = \frac{\beta_r}{a_r} R_{rm+1},$$

d'où

$$R_m = \mu R, \quad R_{m+1} = \mu R_1, \quad \mu = \frac{\beta}{a} : \frac{\beta_1}{a_1}.$$

Or on tire de

$$R_m = \mu R,$$

en dérivant par rapport à v et en tenant compte de

$$R_{m+1} = \mu R_1,$$

que l'on a

$$\mu_v = 0.$$

De même de $R_{m+1} = \mu R_1$, on tire $\mu_u = 0$. On a donc $\mu = \text{const.}$

III. SUITE POLAIRE D'UNE SUITE AUTOPROJECTIVE.

192. Nous voulons démontrer que *la suite polaire d'une suite autoprojective est elle-même autoprojective.*

Soit (x) le réseau défini par le système (4), dont la suite est autoprojective et qui est située dans un E_n,

$$n = (r+1)m - 1.$$

Considérons le point y défini par

$$(9) \quad \Sigma yx = 1, \ \Sigma yx_1 = 0. \ \Sigma yx_2 = 0, \ \ldots, \ \Sigma yx_{(r+1)m-1} = 0.$$

Nous savons d'avance (no. 123) que ce point décrit un réseau. Nous allons trouver l'équation de Laplace correspondante. A cet effet nous remarquerons que de (4) on tire

$$(10) \quad \Sigma yx_{(r+1)m} = a.$$

Digitized by Google

Comme, de la seconde équation (4), on déduit, en dérivant par rapport à u,

$$x_{(r+1)m-1} = \frac{a}{k} x_{-1} + a^{(1)} x_{m-1} + a^{(2)} x_{2m-1} + \ldots + a^{(r)} x_{rm-1}$$

on en conclut

$$\Sigma y x_{-1} = 0,$$

ou

$$\Sigma y x_u = -b,$$

d'où, à l'aide de (9),

$$\Sigma y_u x = b.$$

Un calcul analogue donne les systèmes suivants

$$\Sigma y_u x = b,\ \Sigma y_u x_1 = -h,\ \Sigma y_u x_2 = 0, \ldots, \Sigma y_u x_{(r+1)m-1} = 0;$$
$$\Sigma y_v x = a,\ \Sigma y_v x_1 = 0,\ \Sigma y_v x_2 = 0, \ldots, \Sigma y_v x_{(r+1)m-2} = 0,\ \Sigma y_v x_{(r+1)m-1} = -a;$$
$$\Sigma y_{uv} x = a_u + b_v + 2ab - c,\ \Sigma y_{uv} x_1 = -ah,\ \Sigma y_{uv} x_2 = 0,\ \Sigma y_{uv} x_{(r+1)m-2} = 0,$$
$$\Sigma y_{uv} x_{(r+1)m-1} = -ab.$$

De toutes ces relations il résulte que les fonctions η_i

$$\eta_i = y_{uv}^{(i)} - a\, y_u^{(i)} - b\, y_v^{(i)} + (c - a_u - b_v)\, y^i,\ i = 1, 2, \ldots, (r+1)\, m$$

satisfont aux relations

$$\Sigma \eta x = 0,\ \Sigma \eta x_1 = 0, \ldots,\ \Sigma \eta x_{(r+1)m-1} = 0$$

donc

$$\eta_i = 0,$$

c'est-à-dire les y_i $(i = 1, 2, \ldots, (r+1)m)$ sont des solutions de l'équation

$$L' = y_{uv} - a\, y_u - b\, y_v + (c - a_i - b_v)\, y = 0,$$

adjointe de

$$L = 0$$

vérifiée par le réseau (x).

193. Il s'agit maintenant de prouver que la suite $[y]$ déduite du réseau précédent est, comme la suite donnée $[x]$, autoprojective.

A cet effet nous démontrerons que y vérifie un système tout pareil à (4).

Nous établirons d'abord quelques relations dont nous aurons besoin plus loin.

Nous avons en premier lieu les relations (9) et (10), qui prouvent que le point y est le pôle de l'espace linéaire L_{n-2} à $n - 2$ dimensions, défini par les $n - 1 = (r+1)\, m - 1$ points suivants

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{(r+1\ m-1}.$$

Digitized by Google

Cet espace linéaire L_{n-2} contient les espaces linéaire L'_r, L''_r, ... $L_r^{(m-1)}$ définis au no. 188. En effet, il contient les points

$$x_1,\ x_{m+1}\ x_{2m+1}, \cdots, x_{rm+1}$$

qui déterminent L'_r, les points

$$x_2,\ x_{m+2},\ x_{2m+2}, \cdots, x_{rm+2}$$

qui déterminent L''_r, ..., enfin les points

$$x_{m-1},\ x_{2m-1},\ x_{3m-1}, \cdots, x_{(r+1)m-1}$$

qui déterminent $L_r^{(m-1)}$.

Le même espace L_{n-2} ne contient de l'espace L_r, déterminé par les points

$$x,\ x_m,\ x_{2m}, \cdots, x_{rm},$$

que les r points

$$x_m,\ x_{2m}, \cdots, x_{rm}$$

et il ne peut en contenir un autre, car il contiendrait la suite entière, ce qui n'est pas.

On conclut de là

$$\Sigma y x_k = 0$$

pour toutes les valeurs entières de k (nous nous bornerons à $k \geqslant 0$), sauf pour $k = o$ et $k = sm$ $(s > r)$; pour ces dernières on a

$$\Sigma y x_k = \text{const.} \neq 0.$$

En dérivant par rapport à v on a dans tous les cas

$$\Sigma (y_1 - a'y)\ x_k + \Sigma y\,(x_{k+1} - a_k\ x_k) = 0$$

ou

$$(11)\quad \Sigma y_1 x_k + \Sigma y\ x_{k+1} - (a' + a_k)\ \Sigma y\, x_k = 0,$$

où $a' = -a$ est un des coefficients de $L' = 0$.

Pour cette relation (11) nous avons trois cas à considérer, selon la valeur de k:

a) $k = 0$ ou $k = sm$ $(s > r)$, donc

$$\Sigma y\, x_{k+1} = 0,\ \Sigma y x_k = \text{const.} \neq 0,$$

et comme

$$a' + a_k = -a + a_{sm} = -a + a = 0,$$

on a

$$\Sigma y_1 x_k = 0.$$

Digitized by Google

b) $k+1 = sm\ (s>r)$, donc

$$\Sigma y x_k = 0$$

et alors

$$\Sigma y_1 x_k = -\Sigma y x_{sm} = \text{const.} \neq 0.$$

c) ni k, ni $k+1$ n'est égal à zéro ou à sm, donc

$$\Sigma y_1 x_k = 0.$$

On a donc $\Sigma y_1 x_k = 0$ pour toutes les valeurs (positives) de k, sauf pour $k = sm-1$ $(s>r)$, lorsque

$$\Sigma y_1 x_k = \text{const.} \neq 0.$$

Nous supposerons maintenant que l'on ait

$$\Sigma y_i x_k = 0,\ i \geqslant 1$$

pour toute valeur positive de k, sauf pour les valeurs pour lesquelles

$$i+k = s\,m \quad (s>r),$$

lorsque

$$\Sigma y_i x_k = \text{const.} \neq 0,$$

et nous démontrerons qu'il en est de même si l'on remplace i par $i+1$.

En effet, en dérivant par rapport à v, on a

$$\Sigma (y_{i+1} - a'_i y_i) x_k + \Sigma y_i (x_{k+1} - a_k x_k) = 0$$

ou

$$(12).\ \Sigma y_{i+1} x_k + \Sigma y_i x_{k+1} - (a'_i + a_k) \Sigma y_i x_k = 0.$$

Si l'on a

$$\Sigma y_i x_k = 0,\ \Sigma y_i x_{k+1} = 0$$

la dernière relation donne aussi

$$\Sigma y_{i+1} x_k = 0.$$

Considérons donc les cas où $\Sigma y_i x_k \neq 0$ ou bien $\Sigma y_i x_{k+1} \neq 0$.

a) Si l'on a

$$\Sigma y_i x_k \neq 0,$$

on a nécessairement

$$i+k = sm\ (s>r),$$

et alors

$$a'_i + a_k = a'_i + a_{sm-i} = a'_i + a_{m-i}$$

et on démontre comme au no. 168 que l'on a

$$a'_i + a_k = a'_i + a_{m-i} = 0,$$

donc (12) devient

$$\Sigma y_{i+1} x_k = 0.$$

Digitized by Google

b) Si l'on a

$$\Sigma\, y_i\, x_{k+1} \neq 0,$$

on a

$$i + k + 1 = sm \quad (s > r),$$

donc

$$\Sigma\, y_{i+1}\, x_k = -\Sigma\, y_i\, x_{k+1} \neq 0,$$

et la proposition annoncée est complètement démontrée.
On peut donc énoncer le résultat général suivant:

On a

$$\Sigma\, y_i\, x_k = 0,$$

pour $i \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, *sauf pour les valeurs* $i = k = 0$ et pour *celles qui vérifient la relation*

$$i + k = sm \quad (s > r),$$

lorsque

$$\Sigma\, y_i\, x_k = a_{ik} = \text{const.} \neq 0.$$

194. Nous pouvons maintenant démontrer que la suite $[y]$ est périodique. Considérons l'expression

$$\begin{aligned} Y_i = y^{(i)}_{(r+1)m} - \beta\, y^{(i)} - \beta'\, y^{(i)}_1 - \ldots - \beta^{(m-1)}\, y^{(i)}_{m-1} - \beta_1\, y^{(i)}_m - \beta'_1\, y^{(i)}_{m+1} - \ldots - \beta^{(m-1)}_1\, y^{(i)}_{2m-1} \\ - \beta_2\, y^{(i)}_{2m} - \ldots - \beta^{(m-1)}_2\, y^{(i)}_{3m-1} - \ldots\ldots - \beta_r\, y^{(i)}_{rm} - \beta'_r\, y^{(i)}_{rm+1} - \ldots \beta^{(m-1)}_r\, y^{(i)}_{(r+1)m-1}. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que l'on peut déterminer les $n = (r+1)\,m$ coefficients β, de manière que l'on ait les $n = (r+1)\,m$ relations

$$\Sigma\, Y\, x = 0, \quad \Sigma\, Y\, x_1 = 0, \ldots, \quad \Sigma\, Y\, x_{(r+1)m-1} = 0,$$

ce qui exige que y vérifie la relation

$$Y = 0.$$

Prenons tout d'abord la relation

$$\Sigma\, Y\, x = 0;$$

Comme on a

$$\Sigma\, y\, x = 1, \quad \Sigma\, y_i\, x = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, (r+1)m-1), \quad \Sigma\, y_{(r+1)m}\, x = \text{const.} \neq 0,$$

elle donne

$$\beta = \Sigma\, y_{(r+1)m}\, x = a_{(r+1)m,\,0} = \text{const.} \neq 0.$$

Si l'on prend maintenant

$$\Sigma\, Y\, x_1 = 0,$$

en remarquant que

$$\Sigma\, y_i\, x_1 = 0,$$

Digitized by Google

sauf pour $i+1 = s\,m$ $(s > r)$, lorsque

$$\Sigma\, y_{(r+1)\,m-1}\, x_1 = a_{(r+1)\,m-1,\,1} = \text{const.} \neq 0,$$

on obtient

$$\beta_r^{(m-1)} \cdot a_{(r+1)\,m-1,\,1} = 0,$$

donc

$$\beta_r^{(m-1)} = 0.$$

Prenons cette fois

$$\Sigma\, Y\, x_m = 0.$$

Comme on a

$$\Sigma\, y_i\, x_m = 0, \quad o \leqslant i \leqslant (r+1)\,m - 1,$$

sauf

$$\Sigma\, y_{rm}\, x_m = a_{rm,\,m} = \text{const.} \neq 0, \quad \Sigma\, y_{(r+1)m}\, x_m = \text{const.} \neq 0,$$

on obtient

$$a_{(r+1)m,\,m} - \beta_r\, a_{rm,\,m} = 0,$$

ce qui donne pour β_r une valeur constante, finie et différente de zéro.

En général, la relation

$$\Sigma\, Y\, x_{tm} = 0, \quad (o < t \leqslant r)$$

donne, à cause des relations

$$\Sigma\, y_i\, x_{tm} = 0,$$

pour

$$o \leqslant i \leqslant (r+1)\,m - 1,$$

sauf

$$\Sigma\, y_{(r-t+1)m}\, x_{tm} = a_{(r-t+1)m,\,tm} = \text{const.} \neq 0, \quad \Sigma\, y_{(r-t+2)\,m}\, x_{tm} = a_{(r-t+2)m,\,tm} \neq 0,$$
$$\ldots, \quad \Sigma\, y_{rm}\, x_{tm} = a_{rm,\,tm} \neq 0, \quad \Sigma\, y_{(r+1)m.}\, x_{tm} = a_{(r+1)m,\,tm} = \text{const.} \neq 0,$$

la relation suivante

$$a_{(r+1)m,\,tm} = a_{(r-t+1)m,\,tm}\,\beta_{r-t+1} + a_{(r-t+2)m,\,tm}\,\beta_{r-t+2} + \ldots + a_{rm,\,tm}\,\beta_r.$$

En y faisant $t = 2$, on obtient

$$a_{(r+1)m\,,\,2m} = a_{(r-1)m\,,\,2m}\ \beta_{r-1} + a_{rm\,,\,2m}\ \beta_r$$

qui donne β_{r-1} parceque β_r est connu. On obtiendra ainsi., de proche, β_{r-2} $\beta_{r-3}, \ldots, \beta_2, \beta_1$.

Considérons maintenant la relation

$$\Sigma\, Y\, x_{m+1} = 0,$$

Digitized by Google

en remarquant que l'on a

$$\Sigma y_i x_{m+1} = 0,$$

sauf pour $i = r\,m - 1$ et $i = (r+1)\,m - 1$, pour lesquelles on a

$$\Sigma y_{rm-1} x_{m+1} = a_{rm-1,\,m+1} \neq 0, \quad \Sigma y_{(r+1)\,m-1} x_{m+1} = a_{(r+1)\,m-1,\,m+1}$$

On obtient alors

$$a_{rm-1,\,m+1}\,\beta_{r-1}^{(m-1)} + a_{(r+1)\,m-1,\,m+1}\,\beta_r^{(m-1)} = 0,$$

d'où, parceque $\beta_r^{(m-1)} = 0$, on tire

$$\beta_{r-1}^{(m-1)} = 0.$$

Un calcul tout pareil donne, en partant de

$$\Sigma Y x_{lm+1} = 0,$$

de proche en proche,

$$\beta_r^{(m-1)} = \beta_{r-1}^{(m+1)} = \ldots = \beta_1^{(m-1)} = \beta^{(m-1)} = 0.$$

En partant ensuite de

$$\Sigma Y x_{lm+2} = 0,$$

on aura

$$\beta_r^{(m-2)} = \beta_{r-1}^{(m-2)} = \ldots = \beta_1^{(m-2)} = \beta^{(m-2)} = 0$$

et ainsi de suite.

On conclut de tous ces calculs que y vérifie l'équation

$$y_{(r+1)m} = \beta\, y + \beta_1\, y_m + \beta_2\, y_{2m} + \ldots + \beta_r\, y_{rm},$$

où les β sont des constantes, dont β et β_r sont différentes de zéro.

Le réseau (y) satisfait donc à un systéme analogue à celui que vérifie (x). La suite $[y]$ est donc autoprojective et a les mêmes propriétés géométriques que $[x]$.

195. Ce résultat étant établi, si l'on considére une suite $[\eta]$ inscrite dans $[y]$, on en déduit, par polarité, une suite $[\xi]$, circonscrite à $[x]$. Or, nous savons (n°s 190 et 191) qu'il y a des suites $[\eta]$, inscrites dans $[y]$ qui sont autoprojectives et nous venons de démontrer que leurs suites polaires $[\xi]$ le sont aussi.

On en conclut qu'à *toute suite autoprojective* $[x]$, *on peut circonscrire des suites qui soient, elles aussi, autoprojectives.*

Digitized by Google

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

Toutes les fois qu'un problème de géométrie ou d'analyse conduit à considérer plusieurs solutions d'une équation de Laplace de la forme

$$\theta_{uv} + a\,\theta_u + b\,\theta_v + c\,\theta = 0,$$

on peut rattacher à ce problème un réseau. On peut alors appliquer les résultats des deux premières parties de cet ouvrage et obtenir une vue géométrique plus claire du problème, ou encore en tirer des transformations intéressantes.

Il y a deux groupes importants d'applications de la théorie générale des réseaux à l'étude des surfaces et des congruences de l'espace à trois dimensions. C'est d'abord le groupe des propriétés qui sont en relation avec les lignes de courbure des surfaces, ensuite le groupe des propriétés qui touchent aux lignes asymptotiques.

Ce sont surtout ces deux groupes d'applications que nous aurons en vue dans ce qui suit.

CHAPITRE X.

LIGNES DE COURBURE.

I. HISTORIQUE ET DÉFINITION.

196. C'est *Monge* qui, pour la première fois, a considéré les lignes de courbure. Il les a considérées non seulement au point de vue de la géométrie infinitésimale, mais aussi en vue des applications à l'architecture et à la gravure [1]).

Monge a montré qu'en partant d'un point quelconque M d'une surface, il y a, dans deux directions perpendiculaires, deux points infiniments voisins dont les normales à la surface rencontrent la normale en M.

Il existe ainsi sur chaque surface deux familles de courbes qui se coupent à angle droit et telles que le long de chacune d'entre elles, les normales à la surface forment une surface développable. Ce sont les *lignes de courbure* de la surface.

On peut, en partant de là, arriver à une autre définition des lignes de courbure. Considérons une ligne de courbure quelconque C. Les tangentes aux lignes de courbure de l'autre famille, aux points communs avec C, sont des nor-

[1]) *Géométrie descriptive de Monge* (éditée par *Brisson*, 7-ème éd., 1847, p. 130 et 133).

Digitized by Google

males de C. Comme ces tangentes font un angle constant (droit) avec les normales de la surface le long de C, il résulte, d'après la théorie des développées des courbes gauches, que ces tangentes forment une surface développable. On en conclut que *les lignes de courbure d'une surface forment un réseau.* Il est aisé de voir, en faisant le raisonnement précédent en sens inverse, que tout réseau orthogonal est formé par les lignes de courbure d'une surface.

197. Si les courbes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sur une surface de notre espace E_3 à trois dimensions sont les lignes de courbure, les coordonnées cartésiennes orthogonales x, y, z vérifient une équation de Laplace de la forme [1])

$$(1) \quad \theta_{uv} + a\,\theta_u + b\,\theta_v = 0$$

et l'on a de plus, comme condition d'orthogonalité du réseau

$$x_u\,x_v + y_u\,y_v + z_u\,z_v = 0\,.$$

Or, si l'on pose

$$2\,\omega = x^2 + y^2 + z^2,$$

on a manifestement

$$\omega_{uv} + a\,\omega_u + b\,\omega_v = x_u\,x_v + y_u\,y_v + z_u\,z_v,$$

donc:

THÉORÈME DE DARBOUX. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de* E_3 *soit orthogonal et qu'il soit par conséquent formé par les lignes de courbure d'une surface est que les coordonnées cartésiennes orthogonales* x, y, z *et l'expression* $x^2 + y^2 + z^2$ *satisfassent à une même équation de Laplace de la forme* (1).

198. Cela étant établi, supposons une surface de E_3 rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes (α, β). On pourra, en général, déterminer les coefficients de l'équation

$$(2) \quad A\,\theta_{\alpha\alpha} + 2\,B\,\theta_{\alpha\beta} + C\,\theta_{\beta\beta} + D\,\theta_\alpha + E\,\theta_\beta = 0\,,$$

de manière qu'elle soit vérifiée par x, y, z et $x^2 + y^2 + z^2$. Si l'on pose

$$2\,\omega = x^2 + y^2 + z^2$$

l'équation précédente est

$$\begin{vmatrix} \theta_{\alpha\alpha} & \theta_{\alpha\beta} & \theta_{\beta\beta} & \theta_\alpha & \theta_\beta \\ x_{\alpha\alpha} & x_{\alpha\beta} & x_{\beta\beta} & x_\alpha & x_\beta \\ y_{\alpha\alpha} & y_{\alpha\beta} & y_{\beta\beta} & y_\alpha & y_\beta \\ z_{\alpha\alpha} & z_{\alpha\beta} & z_{\beta\beta} & z_\alpha & z_\beta \\ \omega_{\alpha\alpha} & \omega_{\alpha\beta} & \omega_{\beta\beta} & \omega_\alpha & \omega_\beta \end{vmatrix} = 0$$

[1]) Car x, y, z et 1 sont les coordonnées homogènes du point.

Digitized by Google

à moins que entre ω, x, y, z, il n'y ait une relation linéaire à coefficients constants. Dans ce cas l'équation (2) est indéterminée et la surface est une sphère ou un plan.

Les caractéristiques (no. 56) de (2)

$$(3)\quad A\,d\beta^2 - 2\,B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\alpha^2 = 0$$

sont les lignes de courbure de la surface. On voit ainsi que, en général, sur une surface de notre espace E_3 il y a un réseau orthogonal et un seul.

Il y a deux cas d'exception: les caractéristiques sont indéterminées ($A = B = C = 0$), ou elles sont confondues ($AC - B^2 = 0$). Dans le premier cas, il est aisé de voir que la surface est une sphère.

Il nous reste à étudier le second cas d'exception. En prenant, dans ce cas, les caractéristiques confondues pour courbes $\alpha = \text{const.}$, on peut réduire l'équation (2) à la forme

$$(4)\quad \theta_{\beta\beta} + p\,\theta_\alpha + q\,\theta_\beta = 0.$$

Comme on a

$$\omega_{\beta\beta} + p\,\omega_\alpha + q\,\omega_\beta = x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2,$$

et comme, d'autre part, ω est une solution de (4), il résulte

$$(5)\quad x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire les courbes $\alpha = \text{const.}$, les caractéristiques confondues, sont des courbes à tangentes isotropes, des courbes de longueur nulle.

De (5) on tire

$$p\,(x_\alpha\,x_\beta + y_\alpha\,y_\beta + z_\alpha\,z_\beta) = 0.$$

Si $p = 0$, l'équation (4) prouve que la surface est réglée à génératrices isotropes.

Si $p \neq 0$, on a

$$x_\alpha\,x_\beta + y_\alpha\,y_\beta + z_\alpha\,z_\beta = 0$$

et on tire facilement

$$x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 = 0,$$

ce qui est impossible pour une surface proprement dite.

Dans ce qui suit nous laisserons de côté ces cas d'exception.

199. Si, dans ce qui précède, on pose $\alpha = x$, $\beta = y$, l'équation (3), que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ r & s & t \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \end{vmatrix} = 0,$$

donne la projection sur le plan $z = 0$ des lignes de courbure.

Digitized by Google

II. IMAGE D'UN RÉSEAU ORTHOGONAL.

200. En vertu du théorème de *Darboux* (no. 197), pour un réseau orthogonal, x, y, z, $x^2 + y^2 + z^2$ et 1 sont des solutions d'une même équation de Laplace

$$(6) \quad \theta_{uv} + a\theta_u + b\theta_v + c\theta = 0.$$

Toute combinaison linéaire à coefficients constants de ces cinq solutions en est aussi une solution. Il en résulte que les coordonnées pentasphériques (no. 24) du point qui décrit le réseau sont aussi des solutions de (6). En employant l'image définie au no. 25, on a le résultat suivant:

Tout réseau orthogonal d'un E_3 *a pour image sur un* E_4 *un réseau quadratique et réciproquement.*

On peut donc appliquer aux réseaux orthogonaux, c'est-à-dire aux surfaces rapportées à leurs lignes de courbure, les propriétés et les transformations des réseaux quadratiques, mais auparavant nous établirons, à l'aide de l'image précédente, quelques propriétés des lignes de courbure.

201. Remarquons tout d'abord que si l'on a une courbe C de E_3, son image dans E_4 est une courbe Γ décrite par le point x

$$x_i = f_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, 5),$$

et tracée sur l'espace quadratique Q_3

$$\Sigma x^2 = 0.$$

Soit, sur Γ, $\bar{x}$ un point voisin de x

$$\bar{x} = f_i(t + h), \quad (i = 1,2,..,5),$$

alors le point y

$$y_i = \frac{\bar{x}_i - x_i}{h} = \frac{f_i(t+h) - f_i(t)}{h}$$

est l'image d'une sphère orthogonale à la droite qui joint les deux points voisins x et $\bar{x}$ de C. D'une manière plus précise, les points x et $\bar{x}$ sont inverses par rapport à la sphère y. A la limite on a le résultat suivant:

Le point x'

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt} = f'_i(t), \; i = 1, 2, \ldots, 5$$

est l'image d'une sphère de E_3 *qui passe par le point* x *de* C *et* y *est orthogonale à cette courbe* [1]).

[1]) Si l'on a $\Sigma x'^2 = 0$ la courbe C est à longueur nulle (no. 26).

Digitized by Google

202. Si l'on considère une sphère z qui passe par les points voisins x et x et que l'on passe à la limite, on a la proposition suivante:

Toute sphère z qui satisfait aux relations

$$\Sigma zx = 0, \quad \Sigma zx' = 0$$

est tangente au point x à la courbe C.

On peut aller plus loin et considérer trois points voisins. On a alors le résultat:

Toute sphère z qui satisfait aux relations

$$\Sigma zx = 0, \quad \Sigma zx' = 0, \quad \Sigma zx'' = 0$$

passe par le cercle osculateur en x de la courbe C.

On a enfin, en considérant quatre points voisins:

La sphère z définie par

$$\Sigma zx = 0, \quad \Sigma zx' = 0, \quad \Sigma zx'' = 0, \quad \Sigma zx''' = 0$$

est osculatrice en x à la courbe C.

203. Considérons maintenant une surface rapportée à un système quelconque (α, β) de coordonnées curvilignes. En un point d'une courbe arbitraire tracée sur cette surface il existe une sphère z contenant la cercle osculateur de la courbe et tangente à la surface. Elle est déterminée par le système

$$(7) \quad \Sigma zx = 0, \Sigma zx_\alpha = 0, \Sigma zx_\beta = 0, \ \Sigma z\,(x_{\alpha\alpha}\,d\alpha^2 + 2\,x_{\alpha\beta}\,d\alpha\,d\beta + x_{\beta\beta}\,d\beta^2) = 0.$$

Le cercle caractéristique de la sphère z le long de la courbe considérée n'est pas, en général, tangent à la surface. Il l'est si l'on a

$$\Sigma x dz = 0, \ \Sigma x_\alpha\,dz = 0, \ \Sigma x_\beta dz = 0,$$

qui se réduisent, en vertu de (7), à

$$(8) \quad \Sigma z\,(x_{\alpha\alpha}\,d\alpha + x_{\alpha\beta}\,d\beta) = 0, \Sigma z\,(x_{\alpha\beta}\,d\alpha + x_{\beta\beta}\,d\beta) = 0.$$

La dernière équation de (7) est alors une conséquence des relations (8).

Dans le cas que nous étudions, on a donc le système

$$\Sigma zx = 0, \Sigma zx_\alpha = 0, \ \Sigma zx_\beta = 0, \ \Sigma z\,(x_{\alpha\alpha}\,d\alpha + x_{\alpha\beta}\,d\beta) = 0,$$
$$\Sigma z\,(x_{\alpha\beta}\,d\alpha + x_{\beta\beta}\,d\beta) = 0,$$

qui n'est compatible que si l'on a

$$\left| x \quad x_\alpha \quad x_\beta \quad x_{\alpha\alpha}\,d\alpha + x_{\alpha\beta}\,d\beta \quad x_{\alpha\beta}\,d\alpha + x_{\beta\beta}\,d\beta \right| = 0.$$

Cette équation, du second degré en $d\alpha$ et $d\beta$, détermine deux familles de courbe sur la surface. Je dis qu'elles en sont les lignes de courbure.

Prenons-les, en effet, comme courbes coordonnées (u, v). On a alors

$$\left| x \ x_u \ x_v \ x_{uu} \ x_{uv} \right| = 0, \ \left| x \ x_u \ x_v \ x_{uv} \ x_{vv} \right| = 0$$

Digitized by Google

qui prouvent que les x_i $(i = 1,2,3,4,5)$ satisfont aux équations de Laplace:

$$A\theta_{uu} + B\theta_{uv} + C\theta_u + D\theta_v + E\theta = 0,$$
$$A'\theta_{uv} + B'\theta_{vv} + C'\theta_u + D'\theta_v + E'\theta = 0.$$

Il y a deux cas à considérer. Si les deux équations précédentes sont distinctes, la surface de E_4 tracée sur Q_3 est développable (no. 60). On a dans ce cas

$$x_i = f_i(u) + vf_i'(v), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

où, à cause de

$$\Sigma x^2 = 0,$$

on a

$$\Sigma f^2(u) = 0, \ \Sigma f'^2(u) = 0,$$

qui prouve que la surface de E_3 est une développable isotrope.

Il faut donc que les deux équations soient identiques. Elles se réduiront alors manifestement à une équation de la forme

$$\theta_{uv} + a\theta_u + b\theta_v + c\theta = 0,$$

qui prouve bien que les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, sont les lignes de courbure de la surface.

On a ainsi pour chaque point de la surface deux sphères remarquables, tangentes à la surface et ayant respectivement pour centres les centres principaux de courbure. Ce sont *les sphères principales* de la surface en ce point [1]).

204. Nous supposerons donc la surface de E_3 rapportée à ses lignes de courbure. Son image est un réseau (x) tracé sur l'espace quadratique Q_3 de E_4.

Considérons la sphère principale z définie par les équations

$$\Sigma zx = 0, \ \Sigma zx_u = 0, \ \Sigma zx_v = 0, \ \Sigma zx_{uu} = 0,$$

auxquelles on peut ajouter, pour fixer le coefficient de proportionnalité,

$$\Sigma z^2 = 1.$$

Son image de E_4 décrit (no. 123) un réseau (z) qui appartient à la suite $[z]$, polaire réciproque de la suite de Laplace $[x]$, déduite de (x), par rapport à Q_3.

Il résulte alors que l'autre sphère principale a pour image le point z_{-1} qui décrit le transformé de Laplace (z_{-1}) de (z) dans le sens de la courbe u.

Nous voulons démontrer maintenant que la suite $[z]$ est circonscrite à la suite $[x]$; d'une manière plus précise, la congruence (zz_{-1}) est conjuguée au réseau (x).

[1]) Voir *F. Klein*, Einleitung in die höhere Geometrie, I, p. 222 et suiv.

Digitized by Google

On a, en effet d'abord,

$$\Sigma z_u\, x = 0,\ \Sigma z_u\, x_u = 0,\ \Sigma z_u\, x_v = 0,\ \Sigma z_u\, z = 0,$$

ensuite

$$\Sigma x.x = 0,\ \Sigma x x_u = 0,\ \Sigma x.x_v = 0,\ \Sigma x.z = 0,$$

et, comme les points x, x_u, x_v, z, sont linéairement indépendants, on a

$$(9)\quad z_u = r'x,$$

qui montre bien que x est situé sur zz_{-1}.

Considérons maintenant les relations

$$\Sigma z_v\, x = 0,\ \Sigma z_v\, x_u = 0,\ \Sigma z_v\, x_{uu} = 0$$

et les deux groupes

$$\Sigma x_v\, x = 0,\ \Sigma x_v\, x_u = 0,\ \Sigma x_v\, x_{uu} - a\,\Sigma x^2{}_u = 0,\ \Sigma x_v\, z = 0;$$
$$\Sigma x.x = 0,\ \Sigma x x_u = 0,\ \Sigma x x_{uu} + \Sigma x^2{}_u = 0,\ \Sigma x z = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Sigma x_1 x = 0,\ \Sigma x_1 x_u = 0,\ \Sigma x_1 x_{uu} = 0,\ \Sigma x_1 z = 0,$$

On en conclut

$$(10)\quad z_v = r x_1.$$

Les conditions d'intégrabilité du système formé par (9) et (10) donnent

$$r' = r_u - br,$$

r étant une solution déterminée de l'équation

$$r_{uv} - (ar)_u - (br)_v + cr = 0,$$

adjointe de (6).

III. TRANSFORMATIONS D'UN RÉSEAU ORTHOGONAL.

205. *Transformation de Ribaucour.* Nous avons montré (no. 96), comme généralisation d'un théorème de Ribaucour de notre espace, que, de tout réseau quadratique on peut déduire d'autres réseaux quadratiques. Appliqué aux réseaux tracés sur l'espace quadratique Q_3 de E_4, le théorème de Ribaucour donne, dans notre espace E_3, une transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure.

Si (x) est le réseau tracé sur Q_3 et (xy) une congruence conjuguée à ce réseau, y étant le foyer défini par les relations

$$(11)\quad y_u = (R_u - bR)x,\ y_v = R(x_v + ax),$$

où R est une solution de l'équation

$$R_{uv} - (aR)_u - (bR)_v + cR = 0,$$

Digitized by Google

adjointe de (6), alors l'intersection x'

$$x' = Xy - Yx,\ X = 2\Sigma xy,\ Y = \Sigma y^2 \text{ (No. 96)}$$

de xy avec Q_3 décrit un réseau (x'), *transformé de Ribaucour de* (x).

206. Je me propose maintenant de démontrer que les surfaces Σ et Σ' de E_3, dont les images sont les réseaux (x) et (x'), sont les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dépendant de deux paramètre.

Cela résulte très simplement de la remarque suivante: les réseaux (x) et (x'), étant conjugués à la congruence (xy), sont harmoniques (no. 75) à une autre conruence $(\xi\eta)$; les tangentes xx_u et $x'x'_v$ d'un côté, xx_u et $x'x'_v$ de l'autre se coupent aux foyers ξ et η de $\xi\eta$. On a en effet [1]).

$$\xi = Xx_u - X_u x = -\frac{1}{Y}(Xx'_u - X_u x'),\ \eta = Xx_v - X_v x = -\frac{1}{Y}(Xx'_v - X_v x').$$

ξ et η sont les images de deux sphères de E_3, orthogonales toutes les deux aux surfaces Σ et Σ' aux points correspondants x et x'. D'une manière plus précise les sphères ξ et η passent par x et x', car on a

$$\Sigma\xi x = 0,\ \Sigma\xi x' = 0,\ \Sigma\eta x = 0,\ \Sigma\eta x' = 0$$

et ξ est orthogonale aux courbes $v = \text{const.}$ de Σ et de Σ' qui passent par x et par x', et η est orthogonale aux courbes $u = \text{const.}$

L'existence d'une sphère z, tangente à Σ et à Σ' en x et x', est évidente géométriquement, car elle est déterminée par la condition d'être orthogonale au cercle C, commun à ξ et η, en x et x', et analytiquement, car elle est définie par les relations

$$(12)\quad \Sigma zx = 0,\ \Sigma zx' = 0,\ \Sigma z\xi = 0,\ \Sigma z\eta = 0,$$

auxquelles on peut ajouter

$$(13)\quad \Sigma z^2 = 1.$$

On voit ainsi qu'une transformation élémentaire des réseaux quadratiques d'un E_4, donne une transformation fondamentale des surfaces de E_3 avec conservation de leurs lignes de courbure.

207. *Transformation par inversion.* Un cas singulier de la transformation de Ribaucour est celui où la congruence (xy), conjuguée au réseau quadratique (x), est une congruence singulière (no. 71).

Soit ω un point fixe, non situé sur Q_3. La droite ωx coupe Q_3 de nouveau en x'

$$x' = x + \lambda\omega,$$

ou

$$\lambda = -\frac{2\Sigma\omega x}{\Sigma\omega^2}.$$

[1]) Il faut tenir compte dans le calcul du fait que X et Y, tout comme x et y, sont des solutions du système (11).

Digitized by Google

Il est manifeste que x' décrit un réseau dont l'équation de Laplace est la même que pour (x).

Dans notre espace E_3, la transformation précédente est une inversion (no. 26) par rapport à la sphère fixe dont l'image est ω.

On a donc le résultat bien connu:

Une inversion ne change pas les lignes de courbure.

IV. THÉORÈME DE DARBOUX.

208. Le théorème que nous allons démontrer va préciser la transformation de Ribaucour dont nous nous sommes occupés aux n°s 205 et 206.

A cet effet nous ferons voir que l'image z de la sphère z, tangente en x et x' aux sur surfaces Σ et Σ', qui se correspondent par une transformation de Ribaucour, décrit, dans E_4, un réseau (z).

Des relations (12) et (13) qui définissent z on tire

$$\Sigma z_u x = 0,\ \Sigma z_u x' = 0,\ \Sigma z_u \eta = 0,\ \Sigma z_u z = 0$$

et comme on a aussi

$$\Sigma \xi x = 0,\ \Sigma \xi x' = 0,\ \Sigma \xi \eta = 0\ ^{1}),\ \Sigma \xi z = 0,$$

il en résulte [2])

$$z_u = \lambda \xi = \lambda X^2 \left(\frac{x}{X}\right)_u.$$

On obtiendrait de la même manière

$$z_u = \mu \eta = \mu X^2 \left(\frac{x}{X}\right)_v.$$

On en conclut que z décrit un réseau harmonique à la congruence $(\xi\eta)$, et que l'équation de Laplace correspondante est de la forme

$$(14) \quad z_{uv} + \alpha z_u + \beta z_v = 0.$$

Ce dernier résultat conduit directement à la première partie du théorème de Darboux.

Posons $z_6 = i = \sqrt{-1}$, de manière que l'on ait, en vertu de

$$\sum_1^5 z^2 = 1$$

la relation

$$\sum_1^6 z^2 = 0.$$

---

[1]) On a $\Sigma \xi \eta = \Sigma (X x_u - X_u x)(X x_v - X_v x) = X^2 \Sigma x_u x_v = 0$, car de $(\Sigma x x_u)_v = 0$, il résulte $\Sigma x_u x_v = 0$.

[2]) Il est aisé de voir que les points x, x', η et z sont linéairement indépendants.

Digitized by Google

Les coordonnées $z_1, z_2, \ldots, z_6$ de la seconde sorte (no. 28) de la sphère z satisfont évidemment à l'équation (14), qui devient une équation générale, de la forme (6), si on multiplice les z_i ($i = 1,2,\ldots,6$) par un même facteur. On a donc le résultat suivant:

Les coordonnées de la seconde sorte de la sphère, tangente aux points correspondants de deux surfaces, déduites l'une de l'autre par une transformation de Ribaucour, satisfont à une même équation de Laplace. L'image de cette sphère dans un espace projectif E_5 *à cinq dimensions est donc un réseau quadratique.*

209. La réciproque de la proposition que nous venons de démontrer est vraie. Prenons donc un réseau quadratique (z) de E_5). On a

$$\sum_1^6 z^2 = 0.$$

On peut toujours poser $z_6 = \sqrt{-1}$ et alors on a

$$\sum_1^5 z^2 = 1$$

et l'équation vérifiée par les z_i ($i = 1,2,3,4,5$) a donc la forme (14). Les z_i sont les coordonnées pentasphérique de la première sorte de la sphère z. Nous considérerons donc l'image z de cette sphère dans l'espace E_4.

Les deux points de contact x et x' de la sphère z avec son enveloppe sont situés à l'intersection avec les sphères z_u et z_v. Considérons un de ces points, x par exemple. Il vérifie les relations.

$$\Sigma zx = 0, \quad \Sigma z_u x = 0, \quad \Sigma z_v x = 0, \quad \Sigma x^2 = 0.$$

Nous allons démontrer que l'image x de ce point dans E_4, située sur l'espace quadratique Q_3

$$\Sigma x^2 = 0,$$

décrit un réseau quadratique (x). On a en effet les trois groupes de relations

$$\Sigma z_u x = 0, \quad \Sigma z_u z = 0; \quad \Sigma x.x = 0, \quad \Sigma xz = 0; \quad \Sigma x_u x = 0, \quad \Sigma x_u z = 0,$$

d'où l'on tire

$$z_u = p\,x + q x_u$$

et de la même manière

$$z_v = rx + s x_v.$$

On en conclut

$$(px + qx_u)_v = (rx + sx_v)_u,$$

qui prouve bien que x décrit un réseau, à moins que $q = s$. Dans ce cas le réseau (x) se réduit à une courbe; c'est un *cas singulier* que nous pouvons laisser de côté.

Digitized by Google

La démonstration faite pour le point de contact x s'applique aussi à l'autre point de contact x'. Par conséquent sur les deux nappes Σ et Σ' de l'enveloppe de la sphère z les lignes de courbure se correspondent.

D'ailleurs la correspondance entre les images (x) et (x') de Σ et Σ' est celle qui est donnée par la transformation de Ribaucour. En effet, le même calcul, fait plus haut, donnerait

$$z_u = p' x' + q' x'_u, \quad z_v = r' x' + s' x'_i,$$

donc

$$p x + q x_u = p' x' + q' x'_u, \quad r x + s x_v = r' x' + s' x'_v$$

qui prouvent que les tangentes correspondantes des réseaux (x) et (x') se coupent. Les deux réseaux sont harmoniques à la congruence $(z_u z_v)$; ils sont donc (no. 80) conjugués à une même congruence.

Le théorème de M. *Darboux* est ainsi complètement démontré.

210. Il serait intéressant de trouver une interprétation géométrique dans notre espace à trois dimensions de la transformation de Ribaucour que l'on peut appliquer au réseau quadratique (z) de l'espace E_5. Cette transformation change un couple de surfaces Σ et Σ', qui constituent les deux nappes d'une enveloppe de sphères sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent, en un couple analogue. Il s'agirait donc d'approfondir les relations géométriques entre ces deux couples de surfaces.

V. SYSTÈMES CYCLIQUES.

211. Ce qu'il y a d'intéressant dans la méthode précédente, c'est qu'elle conduit directement aux célèbres *systèmes cycliques de Ribaucour*, c'est-à-dire aux congruences de cercles orthogonaux à des familles de surfaces, appartenant chacune à un système triple orthogonal.

Considérons en effet la sphère z de E_3 tangente aux surfaces Σ et Σ', qui se correspondent par une transformation de Ribaucour. Ses coordonnées z_i $(i=1,2,...,5)$ sont déterminées par (12) et (13). Or de cette dernière relation on tire

$$\Sigma z_u z = 0, \quad \Sigma z_v z = 0,$$

qui prouvent que les sphères z_u et z_v sont orthogonales à la sphère z; elles se coupent donc suivant un cercle C orthogonal aux surfaces [1]) Σ et Σ'.

Je dis que les cercles C sont orthogonaux à une famille de surfaces, qui appartient à un système triple orthogonal.

---

[1]) En vertu de (14) les sphères z_u et z_v sont orthogonales; elles passent d'ailleurs par x et x'.

Digitized by Google

Remarquons tout d'abord que les points x, x', z, z_u et z_v de E_4 étant linéairement indépendants, tout point ζ de cet espace est donnée par une expression de la forme

$$(15) \quad \zeta = a\,x + a'\,x' + \gamma\,z + \gamma'\,z_u + \gamma''\,z_v.$$

Ce point est l'image d'un point du cercle C si l'on a

$$(16) \quad \Sigma\,\zeta^2 = 0, \quad \Sigma\,\zeta z_u = 0, \quad \Sigma\,\zeta z_v = 0.$$

Comme on a

$$\Sigma\,z_u^2 \neq 0, \quad \Sigma\,z_v^2 \neq 0\ ^2), \quad \Sigma\,z_u\,z_v = 0,$$

les deux dernières relations (16) donnent $\gamma' = \gamma'' = 0$ et (15) se réduit alors à

$$\zeta = a\,x + a'\,x' + \gamma\,z.$$

La première relation (16) devient

$$2\,a\,a'\,\Sigma\,x\,x' + \gamma^2 = 0.$$

Or on a

$$2\,\Sigma\,x\,x' = 2\,\Sigma\,x\,(X\,y - Y\,x) = 2\,X\,\Sigma\,x\,y = X^2;$$

on peut donc pendre

$$a = 1, \quad a' = -w^2, \quad \gamma = w\,X,$$

w étant un paramètre arbitraire et alors

$$(17) \quad \zeta = x + X\,z\,.w - x'\,.w^2$$

Pour $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ le point ζ décrit le cercle C, le long duquel varie seulement w.

Cela étant, un calcul qui n'est pas bien compliqué, mais où il faut tenir compte des relations qui interviennent aux no. 205 et suiv., prouve que l'on a

$$\Sigma\,\zeta_u\,\zeta_w = 0, \quad \Sigma\,\zeta_v\,\zeta_w = 0, \quad \Sigma\,\zeta_u\,\zeta_v = 0,$$

ce qui démontre que les surfaces $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, et $w = \text{const.}$, forment un système triple orthogonal. Les surfaces $w = \text{const.}$, appartiennent donc à ce qu'on appelle une famille de *Lamé*: elles constituent une des trois familles d'un système triple orthogonal.

212. Les coordonnées cartésiennes homogènes du point ζ de notre espace E_3, correspondant au point ζ de E_4 défini par (17), étant de la forme

$$\zeta_i = a_i + b_i\,w + c_i\,w^2, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

il résulte que *quatre surfaces* $w = \text{const.}$, *déterminent sur les cercles un même rapport anharmonique.*

---

[1]) On peut laisser de côté les cas où l'une ou les deux inégalités deviennent des égalités.

Digitized by Google

213. Parmi les systèmes cycliques il y en a de spéciaux, dont les cercles passent par un point fixe.

Nous allons démontrer qu'un tel système peut être défini à l'aide de la seule surface Σ.

On a en effet

$$(18)\quad \Sigma a\, z_u = 0, \quad \Sigma a\, z_v = 0,$$

$a\ (a_1, a_2, \ldots, a_5)$ étant le point fixe. On peut donc prendre

$$\Sigma a\, z = 1.$$

Comme on a (no. 208)

$$z_u = \lambda\, \xi, \quad z_v = \mu\, \eta,$$

les relations (18) deviennent

$$\Sigma a\, \xi = 0, \quad \Sigma a\, \eta = 0$$

ou bien

$$\Sigma a\, (X\, x_u - X_u\, x) = 0, \quad \Sigma a\, (X\, x_v - X_v\, x) = 0,$$

d'où

$$\frac{X}{\Sigma a\, x} = \text{const.}$$

et on pourra prendre

$$X = \Sigma\, a\, x.$$

Comme on a

$$y_u = R_{-1}\, x, \quad y_v = R\, x_1$$

et

$$Y_u = R_{-1}\, X, \quad Y_v = R\, X_1,$$

on tire d'abord

$$(\Sigma\, a\, y)_u = R_{-1}\ \Sigma\, a\, x, \quad (\Sigma\, a\, y)_v = R\, (\Sigma\, a\, x)_1,$$

or $X = \Sigma a x$, donc

$$Y = \Sigma\, a\, y + m, \quad m = \text{const.}$$

Les relations

$$X = \Sigma\, a\, x, \quad Y = \Sigma\, a\, y + m$$

peuvent être écrites sous la forme

$$\Sigma\, x \left(y - \frac{a}{2} \right) = 0, \quad \Sigma \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 = m.$$

Digitized by Google

Le point $t = y - \frac{a}{2}$ de E_4 est déterminé par la surface Σ, car on a

$$\Sigma t x = 0, \quad \Sigma t x_u = 0, \quad \Sigma t x_v = 0, \quad \Sigma t x_{uu} = 0, \quad \Sigma t^2 = m.$$

Alors à l'aide de t et du point fixe a on tire

$$y = t + \frac{a}{2},$$

la transformation de Ribaucour est donc déterminée et le système cyclique complètement défini.

On a donc le résultat suivant:

Les cercles orthogonaux à une surface et passant par un point fixe forment un système cyclique.

CHAPITRE XI.

SURFACES ISOTHERMIQUES.

I. HISTORIQUE ET DÉFINITION.

214. C'est le problème des cartes géographiques, c'est-à-dire la représentation conforme d'une surface sur un plan, qui a conduit tout d'abord à la considération des systèmes isothermes tracés sur une surface. Un peu plus tard *Lamé* a donné une autre définition de ces systèmes, en considérant certains problèmes fondamentaux de propagation de la chaleur.

Bornons-nous à la première définition et désignons par u et v les coordonnées cartésiennes orthogonales du point du plan qui correspond au point (x,y,z) de la surface. Comme la représentation conforme conserve la similitude des éléments infiniments petits, on a

$$(1) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = m^2 (du^2 + dv^2),$$

m étant une fonction de u et v.

On voit ainsi que aux droites $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ du plan, il correspond sur la surface deux familles de courbes qui se coupent à angle droit et qui, prises comme courbes coordonnées, donnent à l'élément linéaire la forme caractéristique (1).

Ce sont ces deux familles de courbes qui constituent un *système isotherme*. D'après (1) on peut dire que les courbes d'un système isotherme divisent la surface en carrés infiniments petits.

215. Cela étant rappelé, on appelle *surface isothermique* une surface de notre espace dont les lignes de courbure forment un système isotherme. Si l'on prend

Digitized by Google

les lignes de courbure comme courbes coordonnées sur la surface, l'élément linéaire de celle-ci a la forme (1). Comme x, y, z satisfont à une équation de Laplace

$$\theta_{uv} + a\theta_u + b\theta_v = 0$$

à laquelle satisfait aussi $x^2 + y^2 + z^2$, on a

$$\frac{\delta}{\delta v}(x^2{}_u + y^2{}_u + z^2{}_u) = 2(x_u x_{uv} + y_u y_{uv} + z_u z_{uv})$$
$$= -2a(x^2{}_u + y^2{}_u + z^2{}_u) - 2b(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)$$

donc

$$a = -\frac{m_v}{m}$$

et, de la même manière,

$$b = -\frac{m_u}{m},$$

d'où

$$a_u = b_v$$

ou encore

$$h = k,$$

c'est-à-dire *les invariants de l'équation de Laplace qui correspond aux lignes de courbure de la surface isothermique sont égaux.*

Réciproquement, je dis que si les invariants de l'équation de Laplace qui correspond aux lignes de courbure d'une surface sont égaux, cette surface est isothermique.

Soit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'élément linéaire de la surface. On a

$$a = -\frac{\mathrm{E}_v}{2\mathrm{E}}, \quad b = -\frac{\mathrm{G}_u}{2\mathrm{G}}$$

et, comme par hypothèse $h = k$ ou

$$a_u = b_v,$$

on en tire

$$\frac{\delta^2}{\delta u\,\delta v} log\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}} = 0,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

U étant une fonction seulement de u, V seulement de v. On a donc

$$\mathrm{E} = m^2\mathrm{U}, \quad \mathrm{G} = m^2\mathrm{V}$$

Digitized by Google

et l'élément linéaire de la surface est

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = m^2 (\mathrm{U}\, du^2 + \mathrm{V}\, dv^2).$$

En posant

$$\alpha = \int \sqrt{\mathrm{U}}\, du, \beta = \int \sqrt{\mathrm{V}}\, dv,$$

cet élément a la forme

$$ds^2 = \mu^2 (\alpha, \beta) (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

qui montre que la surface considérée est isothermique.

Maintenant il est aisé de passer aux coordonnées pentasphériques et tirer de là la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit isothermique est que le réseau (x), *image de ses lignes de courbure, tracé sur l'espace quadratique* Q_3 *de* E_4, *soit à invariants égaux.*

216. Le problème de la recherche des surfaces isothermiques est trés difficile. Il dépend de l'intégration d'une équation différentielle aux dérivées partielles du quatrième ordre, formée pour la premiére fois par *Weingarten* et retrouvée ensuite sous d'autres formes, en suivant d'autres voies, par plusieurs géomètres. Nous renvoyons le lecteur désireux de connaître en détail cette question aux Leçons de M. *Darboux* sur la théorie générale des surfaces (Tome II, p. 148 et suiv.). Parmi les travaux qui ne sont pas mentionnés dans l'ouvrage de M. *Darboux* nous citons ceux de M-rs *Rothe* et *Callapso*, qui sont arrivés indépendamment l'un de l'autre à la même équation du quatrième ordre, dont la forme est remarquable.

217. Comme l'équation aux dérivées partielles des surfaces isothermiques ne peut être intégrée dans le cas général, il est intéressant d'avoir des moyens de déduire d'une surface isothermique connue d'autres surfaces isothermiques. Le problème de la transformation des surfaces isothermiques s'est ainsi posé dès le début de leur étude.

Nous montrerons ici d'abord que *toute surface inverse d'une surface isothermique est elle-même isothermique* et nous étudierons ensuite plus loin les transformations intéressantes de M. *Darboux* et de *Christoffel.*

Soit (x) l'image sur l'espace quadratique Q_3 de la surface isothermique donnée et ω l'image de la sphère fixe par rapport à laquelle on fait l'inversion. L'inverse x' du point x est alors le second point d'intersection de ωx avec Q_3. Si l'on suppose

$$\Sigma \omega^2 = 1$$

et que l'on introduise la notation

$$\mathrm{A} = \Sigma \omega x,$$

Digitized by Google

on a

$$x' = x - 2\,A\omega.$$

Comme x' vérifie manifestement la même équation de Laplace à invariants égaux que x, la surface dont l'image est le réseau (x') est, comme la surface donnée, isothermique.

II. TRANSFORMATION DE DARBOUX.

218. On peut appliquer au réseau quadratique et à invariants égaux (x), qui correspond à une surface isothermique, la transformation de Darboux que nous avons définie au no. 106 et suivants, mais qui a ici une signification géométrique autrement importante.

En effet, le réseau transformé (x') et le réseau (x) étant conjugués à une même congruence, les surfaces isothermiques correspondantes Σ et Σ' sont (no. 206) les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères dépendant de deux paramètres. Sur ces deux nappes il y a correspondance entre les lignes de courbure. Nous voulons montrer qu'il y a aussi correspondance entre les lignes de longueur nulle, c'est-à-dire que la transformation de Darboux définit une représentation conforme de Σ sur Σ'.

Entre les réseaux à invariants égaux étant une correspondance de Koenigs-Moutard, on a (no. 84)

$$x'_u = \lambda x_u, \quad x'_v = -\lambda x_v.$$

Comme les lignes de longueur nulle de Σ ont pour image sur Q_3 les lignes définies par (no. 26 et 201)

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma dx^2 &= (\Sigma x^2_u)\,du^2 + 2(\Sigma x_u x_v)\,du\,dv + (\Sigma x^2_v)dv^2 \\ &= (\Sigma x^2_u)\,du^2 + (\Sigma x^2_v)\,dv^2 \end{aligned}$$

et comme

$$\Sigma dx'^2 = (\Sigma x'^2_u)\,du^2 + (\Sigma' {}^2_v)\,dv^2 = \lambda^2\,\Sigma dx^2$$

la proposition est démontrée.

219. Au lieu de particulariser la méthode générale donnée au no. 106 et suiv., pour le cas des surfaces isothermiques, nous donnerons ici une autre méthode plus directe.

A cet effet nous formerons tout d'abord un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, vérifié par les coordonnées pentasphériques $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ d'un point de la surface isothermique donnée, ou bien du point x qui décrit le réseau (x) quadratique et à invariants égaux, image de la surface dans l'espace E_4. Une des équations de ce système est connue depuis longtemps, elle est due

Digitized by Google

à M. *Darboux*; c'est une équation de Laplace à invariants égaux que nous supposerons prise sous la forme réduite

$$(1) \quad x_{uv} = hx.$$

Il faut ajouter un nombre suffisant d'équations, pour que le système obtenu puisse définir les $x^{(i)}$, comme solutions linéairement indépendantes, et leurs combinaisons linéaires.

Les $x^{(i)}$ étant des fonctions de u et v connues, on peut déterminer les 5 fonctions a, b, c, d et e de manière que l'équation linéaire

$$(2) \quad x_{uuu} = ax_{uu} + bx_{vv} + cx_u + dx_v + ex$$

admette les $x^{(i)}$ comme solutions. Le système qui définit ces 5 fonctions est impossible ou indéterminé seulement si l'on a

$$\left| x_{uu}^{(i)} \quad x_{vv}^{(i)} \quad x_u^{(i)} \quad x_v^{(i)} \quad x^{(i)} \right| = 0,$$

le premier membre étant un déterminant dont on obtient les différentes lignes en faisant $i = 1,2,3,4$ et 5. Or, cette relation signifierait que les $x^{(i)}$ vérifient une équation de la forme

$$(3) \quad Ax_{uu} + Bx_{vv} + Cx_u + Dx_v + Ex = 0$$

et alors, ou bien le système formé par les équations (1) et (3) est complètement intégrable, qui n'a par conséquent que 4 solutions linéairement indépendantes, donc entre les $x^{(i)}$ il y a une relation linéaire et homogène à coefficients constants, et la surface est une sphère; ou bien ce système n'est pas complètement intégrable. donc (no. 60) le réseau (x) de E_1 est tracé sur une développable. On a dans ce cas[1])

$$x^{(i)} = U_i + aU'_i \ (i = 1, 2, ..., 5),$$

les U_i étant des fonctions de u, les U'_i leurs dérivées et a une fonction de u et v. Or, la relation

$$\Sigma x^2 = 0$$

prouverait que l'on a

$$\Sigma U^2 = 0, \quad \Sigma UU' = 0, \quad \Sigma U'^2 = 0,$$

ce qui montre que la surface isothermique serait une développable isotrope, ce que nous excluons.

On démontrerait de la même manière que l'on peut déterminer 5 autres fonctions a', b', c', d' et e' de manière que l'équation

$$(4) \quad x_{vvv} = a'x_{uu} + b'x_{vv} + c'x_u + d'x_v + e'x$$

admette, elle aussi, les $x^{(i)}$ comme solutions.

Il est clair maintenant que le système (S), formé par les équations (1), (2) et (4) et admettant les 5 solutions linéairement indépendantes $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., 5)$,

[1]) Les variables u et v ne correspondent par nécessairement aux courbes du réseau.

Digitized by Google

est complètement intégrable. Son intégrale générale dépend linéairement tout au plus de 5 constantes arbitraires (les valeurs pour $u = u_0, v = v_0$ de x, x_u, x_v, x_{uu} et x_{vv}). Il admet tout au plus, et seulement dans le cas où il est complètement intégrable, 5 solutions linéairement indépendantes.

Le système (S) définit non seulement la surface isothermique donnée, mais aussi toutes celles qui se déduisent par les transformations géométriques qui correspondent aux transformations linéaires des coordonnées pentasphériques. Or, ces transformations ponctuelles changeants les sphères (ou plans) en sphères (ou plans) sont les transformations conformes de l'espace, combinaisons de similitudes et inversions.

220. Cherchons maintenant les conditions pour qu'un système de la forme (S) puisse définir une surface isothermique.

Il faudra d'abord que les conditions d'intégrabilité soient satisfaites. Si nous écrivons que l'on a

$$(x_{uuu})_v = (x_{uv})_{uu}$$

ou

$$(ax_{uu} + bx_v + cx_u + dx_v + ex)_v = (hx)_{uu}$$

et que l'on y remplace les dérivées du second ordre données par (S) on obtient une équation du second ordre qui doit être une identité. On a ainsi

$$(5)\quad \begin{cases} h = a_v + a'b,\ b_v + bb' + d = 0,\ 2h_u = ah + bc' + c_v, \\ bd' + e + d_v = 0,\ h_{uu} = ah_u + be' + ch + e_v. \end{cases}$$

De même si l'on écrit que

$$(x_{vvv})_u = (x_{uv})_{vvv}$$

on obtient

$$(6)\quad \begin{cases} aa' + c' + a'_u = 0,\ h = a'b + b'_u,\ a'c + e' + c'_u = 0, \\ a'd + b'h + d'_u = 2h_v,\ h_{vv} = a'e + b'h_v + d'h + e'_u. \end{cases}$$

Il faudra ensuite que le système (S), qui est, en vertu de (5) et (6), complètement intégrable, admette 5 solutions $x^{(i)}$ vérifiant la relation

$$(7)\quad \Sigma x^2 = 0.$$

Or, on tire de là

$$(8)\quad \Sigma x x_u = 0,\quad \Sigma x x_v = 0$$

et, à l'aide de (1),

$$(\Sigma x_u^2)_v = 0,\quad (\Sigma x_v^2)_u = 0.$$

En laissant de côté le cas où l'on aurait une des relations

$$\Sigma x_u^2 = 0,\quad \Sigma x_v^2 = 0,$$

Digitized by Google

on pourra changer les variables u et v, sans changer la forme de (S), de manière que l'on ait

$$(9)\quad \Sigma x_u^2 = 1, \quad \Sigma x_v^2 = 1.$$

On tire alors de (8)

$$(10)\quad \Sigma x\, x_{uu} = -1, \quad \Sigma x\, x_{vv} = -1, \quad \Sigma x_u\, x_v = 0,$$

et de là

$$\Sigma x\, x_{uuu} = 0, \quad \Sigma x\, x_{vvv} = 0,$$

d'où (2) et (4) donnent

$$(11)\quad a + b = 0, \quad a' + b' = 0.$$

On aura de même

$$(12)\quad \Sigma x_v\, x_{uu} = 0, \quad \Sigma x_u\, x_{vv} = 0$$

et de (9)

$$(13)\quad \Sigma x_u\, x_{uu} = 0, \quad \Sigma x_v\, x_{vv} = 0.$$

De (12) on tire aisément

$$\Sigma x_v\, x_{uuu} = h, \quad \Sigma x_u\, x_{vvv} = h$$

d'où, à l'aide de (2) et (4),

$$(14)\quad d = c' = h.$$

On a aussi

$$\Sigma x_{uu}\, x_{vv} = 0, \quad \Sigma x_{uu}^2 + c = 0, \quad \Sigma x_{vv}^2 + d' = 0$$

et de là on obtient finalement

$$(15)\quad \begin{cases} c_u = 2ac + 2e, & d'_v = 2b'd' + 2e', \\ c_v = 2h_u, & d'_u = 2h_v, \\ h_v = -bd' - e, & h_u = -a'c - e'. \end{cases}$$

Nous avons obtenu ainsi les relations (11), (14) et (15).

221. Je dis maintenant que les conditions nécessaires, trouvées au no. précédent, sont en même temps suffisantes.

Considérons en effet le point y défini par les relations

$$(16)\quad \Sigma y\, x = 0, \quad \Sigma y\, x_u = 0, \quad \Sigma y\, x_v = 0, \quad \Sigma y\, x_{uu} = -1, \quad \Sigma y\, x_{vv} = -1.$$

Nous allons démontrer tout d'abord qu'il décrit un réseau (y) à invariants égaux. Les relations (16) donnent

$$\Sigma y_u\, x = 0, \quad \Sigma y_u\, x_u = 1, \quad \Sigma y_u\, x_v = 0, \quad \Sigma y_u\, x_{uu} = 0, \quad \Sigma y_u\, x_{vv} = 0,$$

donc

$$\Sigma y_{uv}\, x = 0, \ \Sigma y_{uv}\, x_u = 0, \ \Sigma y_{uv}\, x_v = 0, \ \Sigma y_{uv}\, x_{uu} = -h, \ \Sigma y_{uv}\, x_{vv} = -c' = -h$$

Digitized by Google

et de là

$$\Sigma (y_{uv} - h\, y)\, x = 0, \quad \Sigma (y_{uv} - h\, y)\, x_u = 0, \quad \Sigma (y_{uv} - h\, y)\, x_v = 0,$$
$$\Sigma (y_{uv} - h\, y)\, x_{uu} = 0, \quad \Sigma (y_{uv} - h\, y)\, x_{vv} = 0,$$

d'où l'on conclut

$$y_{uv} = h\, y$$

qui prouve bien que y décrit un réseau (y) à invariants égaux.

Je dis que ce réseau vérifie le même système (S) que le réseau (x) dont nous sommes partis. Comme le calcul, un peu plus long que celui que nous venons du faire, n'a rien de particulier, nous l'omettons. Il résulte alors que (y) s'obtient de (x) par une transformation linéaire. La relation

$$\Sigma\, y\, x = 0$$

prouve ensuite que le réseau (x) est quadratique et que par conséquent il est l'image d'une surface isothermique.

222. Pour finir avec ces préliminaires remarquons que de (5) et (6) on tire

$$(17) \quad h = a_v + a'\, b = b'_u + a'\, b,$$

donc

$$a_v = b'_u,$$

on pourra donc poser

$$a = \frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad b' = \frac{\varphi_v}{\varphi},$$

φ étant une nouvelle fonction de u et v. A l'aide de (11) on a

$$b = -\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad a' = -\frac{\varphi_v}{\varphi}$$

et alors (17) donne

$$h = \frac{\varphi_{uv}}{\varphi}.$$

Si donc on connaissait la fonction φ, on connaîtrait par là même les coefficients a, b, d, h, a', b', c' de (S). Il nous reste à déterminer les coefficients c, e et d', e'. Or on a de (15) les relations

$$c_u = 2\, c\, .\, \frac{\varphi_u}{\varphi} + 2\, e, \quad c_v = 2\, h_u = 2\, c\, .\, \frac{\varphi_v}{\varphi} - 2\, e',$$
$$d'_u = 2\, h_v = 2\, d' \frac{\varphi_u}{\varphi} - 2\, e, \quad d'_v = 2\, d'\, \frac{\varphi_v}{\varphi} + 2\, e',$$

dont on tire immédiatement

$$c + d' = 2\, m\, \varphi^2, \quad m = \text{const.}$$

Digitized by Google

Si l'on prend maintenant la dernière relation de (5) et que l'on y remplace h_u et e_v par leurs valeurs tirées de (15), on obtient

$$h_{uu} = -a(a'c + e') + be' + ch - h_{vv} - bd'_v - d'b_v$$

ou

$$h_{uu} + h_{vv} = \left(h + \frac{\varphi_u \varphi_v}{\varphi}\right)(c + d')$$

ou enfin

$$(18)\quad \left(\frac{\varphi_{uv}}{\varphi}\right)_{uu} + \left(\frac{\varphi_{uv}}{\varphi}\right)_{vv} = m(\varphi^2)_{uv}$$

qui est précisément l'équation de MM. *Rothe* et *Calapso* pour les surfaces isothermiques.

Si φ est une intégrale de cette équation, c est détérminé par des quadratures de

$$c_u = 4m\varphi\varphi_u - 2h_v, \quad c_v = 2h_u.$$

Les coefficients de (S) étant déterminés, la surface isothermique l'est aussi, à une transformation conforme de l'espace près.

223. Nous pouvons maintenant aborder la transformation de Darboux.

Considérons une congruence (xy) conjuguée au réseau (x) défini par le système (S), (y) étant le réseau focal de (xy) qui vérifie le système

$$(19)\quad y_u = R_u x, \quad y_v = R x_v,$$

R étant une solution de (1). Le transformé de Koenigs-Moutard (x') de (x) à l'aide de la solution R est donné par (no. 85)

$$x' = 2y - Rx.$$

Le réseau (x'), ainsi obtenu, est à invariants égaux, mais en général il n'est pas quadratique. Pour qu'il le soit et par conséquent pour qu'il donne une surface isothermique — transformée de Darboux de la surface isothermique qui a comme image le réseau (x) —, on doit avoir

$$\Sigma y^2 - R\Sigma xy = 0,$$

ou en posant

$$X = 2\Sigma xy, \quad Y = \Sigma y^2,$$
$$(20)\quad 2Y = RX.$$

On doit donc choisir la solution R de (1) de manière que l'on ait la relation (20). Or, comme on a

$$(19')\quad Y_u = R_u X, \quad Y_v = R X_v$$

Digitized by Google

qui prouvent que X est une solution de (1); en introduisant dans ces systèmes la valeur de Y donnée par (20), on obtient

$$(21)\quad X = \frac{R}{m}, \quad Y = \frac{R^2}{2m}, \quad m = \text{const.}$$

On a d'autre part, à l'aide du système (S) et de (19)

$$(22)\quad \begin{cases} X_{uuu} = a\,X_{uu} + b\,X_{uv} + c\,X_u + d\,X_v + e\,X - 2\,R_u - 2\,b\,R, \\ X_{vvv} = a'\,X_{uu} + b'\,X_{uv} + c'\,X_u + d'\,X_v + e'\,X + 2\,R_v - 2\,b'\,R, \end{cases}$$

donc, en y remplaçant X par sa valeur de (21), on a le résultat suivant: *Pour que le réseau* (x') *soit quadratique il est nécessaire, mais en général il n'est pas suffisant, que la solution* R *de* (1) *satisfasse aussi aux équations*

$$R_{uuu} = a\,R_{uu} + b\,R_{uv} + (c - 2m)\,R_u + d\,R_v + (e - 2m\,b)\,R,$$
$$R_{vvv} = a'\,R_{uu} + b'\,R_{uv} + c'\,R_u + (d' + 2m)\,R_v + (e' - 2m\,b')\,R.$$

Ces équations constituent avec

$$R_{uv} = h\,R$$

un système linéaire (S_m) complètement intégrable en même temps que (S), auquel il se réduit d'ailleurs pour $m = 0$.

Si R est une solution de (S_m), il est facile de vérifier que $X - \frac{R}{m}$ est une solution de (S). On a donc.

$$X - \frac{R}{m} = 2\,\Sigma\,\omega\,x, \quad \omega_i = \text{const.}\ (i = 1, 2, \ldots, 5).$$

Les fonctions $y^{(i)}$ étant déterminées par (19) à des constantes additives près on peut prendre

$$X = \frac{R}{m}$$

et alors (19′) donnent

$$Y = \frac{R^2}{2m} + \gamma, \quad \gamma = \text{const.}$$

Comme en général $\gamma \neq 0$, *le système* (21) *n'est pas vérifié et le réseau* (x'), *qui correspond à la solution arbitraire* R *du système* (S_m), *n'est pas quadratique.*

224. Le système S_m étant complètement intégrable admet 5 solutions linéairement indépendantes $R_1, R_2, \ldots, R_5$ et la solution générale du système est de la forme

$$R = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \ldots + a_5 R_5, \quad a_i = \text{const.}$$

Je dis que l'on peut choisir les constantes a_i de manière que les relations (21) soient vérifiées et par conséquent que le réseau (x') soit quadratique.

Digitized by Google

En effet, en posant

$$X_j = 2\,\Sigma\, x\, y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, 5,$$

$y_j^{(i)}$ $(i = 1, 2, .., 5)$ étant les solutions de (19) où R est remplacé par R_j, on pourra toujours prendre, comme nous venons de le voir,

$$X_j = \frac{R_j}{m},$$

donc

$$Y_j = \frac{R_j^2}{2m} + \gamma_j, \quad \gamma_j = \text{const.}$$

et de la même manière

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_5 X_5 = \frac{R}{m}, \quad Y = \frac{R^2}{2m} + \gamma,$$

où γ est une constante qui dépend de γ_j et de a_i et en dépend effectivement, car si on prend $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, on a

$$R = a_1 R_1, \quad y = a_1 y_1, \quad Y = a_1^2 Y_1 = a_1^2 \left(\frac{R_1^2}{2m} + \gamma_1\right) = \frac{R^2}{2m} + \gamma_1 a_1^2,$$

donc, dans ce cas,

$$\gamma = \gamma_1 a_1^2.$$

On pourra donc toujours et d'une infinité de manières choisir les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_5$, de manière que l'on ait $\gamma = 0$. Le système (21) est alors vérifié et la transformation de Darboux déterminée.

Il convient de remarquer que le système (S_m) jouit absolument des mêmes propriétés que le système (S). Il définit donc lui aussi, par 5 solutions linéairement indépendantes, une nouvelle surface isothermique. Cette transformation qui dépend de la constante m est *la transformation de Bianchi.*

III. TRANSFORMATION DE CHRISTOFFEL.

225. Etant donnée une surface isothermique dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = m^2 (du^2 + dv^2)$$

et dont l'équation de Laplace est par conséquent (no. 215)

$$\theta_{uv} - \frac{m_v}{m}\theta_u - \frac{m_u}{m}\theta_v = 0,$$

on peut, seulement par des quadratures, en déduire une autre, à l'aide des formules

$$x'_u = \frac{1}{m^2} x_u, \quad y'_u = \frac{1}{m^2} y_u, \quad z'_u = \frac{1}{m^2} z_u,$$

$$x'_v = -\frac{1}{m^2} x_v, \quad y'_v = -\frac{1}{m^2} y_v, \quad z'_v = -\frac{1}{m^2} z_v,$$

compatibles en vertu de l'équation de Laplace.

Digitized by Google

Cette transformation, donnée par Christoffel, qui se présente naturellement en coordonnées catésiennes, est plus cachée lorsqu'on étudie l'image (x) de la surface isothermique dans l'espace E_4.

Pour y arriver nous supposerons d'abord que le réseau (x), tracé sur l'espace quadratique Q_3 de E_4 est général, c'est-à-dire l'équation de Laplace correspondante,

$$L \equiv x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0$$

est quelconque.

Soit $(x\,y)$ une congruence conjuguée à (x), y étant déterminé par

$$y_u = (R_u - b\,R)\,x, \quad y_v = R\,(x_v + a\,x),$$

où R est une solution de

$$R_{uv} - (a\,R)_u - (b\,R)_v + c\,R = 0,$$

adjointe de $L = 0$.

Si l'on pose, comme nous l'avons déjà fait,

$$X = 2\,\Sigma\,x\,y, \quad Y = \Sigma\,y^2,$$

alors le point x' commun à $x\,y$ et à Q_3 est

$$x' = X\,y - Y\,x.$$

D'aprés le théorème de Ribaucour (no. 95 et 96) le point x' décrit un réseau (x') conjugué, comme (x), à la congruence (xy). Les réseaux (x) et (x') sont alors (no. 75) harmoniques à une même congruence $(\xi\,\eta)$, où

$$\xi = Xx_u - X_u\,x, \quad \eta = X\,x_v - X_v\,x.$$

Or, si l'on considère le réseau (s) décrit par le point

$$s = x + X\,\omega, \quad \omega_i = \text{const.},$$

on voit qu'il est aussi harmonique à $(\xi\eta)$. La droite sx' décrit donc une congruence (sx') conjuguée aux réseaux (s) et (x'). Elle coupe l'espace quadratique Q_3, en dehors de x', en un point x'', lequel, d'après le théorème de Ribaucour, décrit un nouveau réseau (x'').

Cette nouvelle transformation des réseaux quadratiques correspond à la représentation sphérique des lignes de courbure — transformation des surfaces avec conservation de la représentation sphérique.

Supposons actuellement le réseau quadratique (x) à invariants égaux et prenons $a = b = 0$. L'équation adjointe, vérifiée par R, étant maintenant identique à $L = 0$, prenons comme solution particulière

$$R = \Sigma\,\omega\,x, \quad \Sigma\,\omega^2 = 0$$

et nous allons démontrer que le réseau (x''), défini plus haut, est, comme (x), quadratique et à invariants égaux. Ce sera *la transformation de Christoffel*.

Digitized by Google

A cet effet reprenons le cas général. Si l'on pose

$$A = \Sigma \omega x, \quad B = \Sigma \omega y, \quad C = \Sigma \omega^2$$
$$S = 2A + CX, \quad T = 2B + 1 + CY,$$

on a évidemment

$$B_u = (R_u - b R) A, \quad B_v = R (A_v + a A);$$
$$T_u = (R_u - b R) S, \quad T_v = R (S_v + a S)$$

et le point x'', commun à $s x'$ avec Q_3, est

$$x'' = T s - S t.$$

Un calcul facile donne

$$\left(\frac{x''}{S}\right)_u = T \left(\frac{s}{S}\right)_u, \quad \left(\frac{x''}{S}\right)_v = (T - R S) \left(\frac{s}{S}\right)_v,$$

qui prouvent que les réseaux (x'') et (s) sont harmoniques à une même congruence. Si

$$2T - RS = 0$$

le réseau (x'') est à invariants égaux (no. 86).
Or dans notre cas on a

$$R = A$$

donc

$$B_u = AA_u, \quad B_v = AA_v,$$

d'où

$$2B = A^2 + \text{const.}$$

Comme les y sont définies à des constantes additives près on peut prendre

$$2B + 1 = A^2$$

On a d'autre part, par hypothèse

$$C = 0,$$

donc

$$S = 2A, \quad T = 2B + 1$$

et alors

$$2T - RS = 2(2B + 1) - 2A^2 = 0.$$

La transformation de Christoffel est ainsi complètement déterminée.

Les principes établis dans ce n° permettent d'étudier à fond la théorie des surfaces à lignes de courbure sphériques.

Digitized by Google

IV. SURFACES À LIGNES DE COURBURE SPHÉRIQUES.

226. Si les lignes de courbure $u = \text{const.}$ d'une surface sont sphériques, l'image (x) de E_4 satisfait à une relation de la forme

$$\Sigma\, U\, x = 0,$$

les U_i $(i = 1, 2, .., 5)$ étant des fonctions de la seule variable u, et réciproquement. Dans ce cas la suite de Laplace $[x]$, ayant pour réseau initial (x), est terminée dans le sens des courbes v selon le cas de Goursat (no. 134), à savoir (x_3) se réduit à une courbe tangente à $x_2 x_3$.

L'étude des surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système se réduit à l'intégration d'un système de la forme

$$x_{uv} + a\, x_u + b\, x_v + c\, x = 0, \quad x_4 = 0,$$

supposé compatible, admettant par conséquent au moins 5 solutions linéairement indépendantes et celles-ci vérifiant la relation

$$\Sigma\, x^2 = 0.$$

Nous n'aborderons pas le problème dans toute sa généralité. Nous nous bornons à appliquer les résultats de la théorie générale pour retrouver les propriétés connues de cette classe importante de surfaces.

Nous montrerons d'abord que *si une surface a un système de lignes de courbure sphériques, les surfaces, qui coupent à angle droit les cercles orthogonaux à la surface donnée et passant par un point fixe, jouissent de la même propriété.*

Soit (x') l'image d'une des surfaces qui coupent à angle droit le cercle orthogonal à la surface ayant pour image (x) et passant par le point fixe ω ($\omega_1 \omega_2, \ldots \omega_5$, $\Sigma\, \omega^2 = 0$).

On a (no. 205)

$$x' = X\, y - Y\, x,$$

où, d'après le no. 213,

$$X = \Sigma\, \omega\, x, \quad Y = \Sigma\, \omega\, y + m, \quad m = \text{const.}$$

et alors

$$(1) \quad \Sigma\, \omega\, x' = -m\, \Sigma\, \omega\, x = -m\, X.$$

On a d'autre part

$$(2) \quad \Sigma\, U\, x' = X\, \Sigma\, U\, y.$$

Or de

$$y_u = (R_u - b\, R)\, x, \quad y_v = R\, (x_v + a\, x)$$

on tire

$$\Sigma\, U\, y_u = 0 \quad \Sigma\, U\, y_v = 0,$$

Digitized by Google

donc

$$\Sigma \, U \, y = U,$$

U_0 étant une nouvelle fonction de u. La relation (2) devient

$$(3) \quad \Sigma \, U \, x' = U_0 \, X.$$

Les relations (1) et (3) donnent finalement

$$\Sigma \, (m \, U + \omega \, U_0) \, x' = 0,$$

qui prouve bien que le surface ayant pour image (x') a les lignes de courbure $u = \text{const.}$, sphériques.

227. *Théoréme de Dobriner.* Nous avons démontré au no. 225 que, étant donné un réseau (x'), transformé de Ribaucour du réseau quadratique (x), on peut déduire, à l'aide d'une point fixe ω, un nouveau réseau quadratique (x'').

Il s'agit actuellement de démontrer, et c'est là le théoréme de Dobriner, que *si la surface* [1]) (x) *a un système de lignes de courbure sphériques, il y a, parmi les surface* (x''), *une infinité qui jouissent de la même propriété. Parmi ces dernières il y en a dont les sphères contenant les lignes de courbure sphériques passent par un point fixe.*

Rappelons tout d'abord que la sphère principale z de (x), définie par

$$\Sigma \, z \, x = 0, \; \Sigma \, z \, x_u = 0, \; \Sigma \, z \, x_v = 0, \; \Sigma \, z \, x_{uu} = 0, \; \Sigma \, z^2 = 1,$$

satisfait (no. 204) aux relations

$$(4) \quad z_u = (r_u - br) \, x, \; z_v = r \, (x_v + ax).$$

Cela étant, on a (no. 225)

$$x'' = Ts - St.$$

Supposons que la solution R qui sert à définir y par les relations

$$y_u = (R_u - bR) \, x, \quad y_v = R \, (x_v + ax)$$

soit $R = mr$. On a alors manifestement

$$y^{(i)} = mz^{(i)} + n_i, \; m = \text{const.}, \; n_i = \text{const.}, \; i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Comme les lignes de courbure $u = \text{const.}$ de (x) sont, par hypothèse, sphériques, on a

$$\Sigma U x = 0;$$

je dis qu'alors il en est de même de celles de la surface (x'').

[1]) Au lieu de dire la surface de E_3 qui a pour image le réseau (x) de $E_{4,1}$ je dirai tout simplement la surface (x).

Digitized by Google

Pour le faire voir, je montrerai tout d'abord que l'on peut trouver des fonctions $\bar{U}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$) de la seule variable u, telles que l'on ait

$$(5) \quad \Sigma \bar{U} s = S$$

et en supposant $C = \Sigma\omega^2 = o$. Or, comme (no. 225)

$$s = x + X\omega, \quad S = 2A + CX = 2A,$$

la relation précédente se réduit à

$$\Sigma x (\bar{U} + 2\bar{U}_o y - 2\omega) = o, \quad \text{où} \quad \bar{U}_o = \Sigma \bar{U}\omega$$

ou en remplaçant y par $mz + n$ et en tenant compte que $\Sigma xz = o$,

$$\Sigma x (\bar{U} + 2\bar{U}_o n - 2\omega) = o.$$

Cette relation est évidemment satisfaite en posans

$$(6) \quad \bar{U}_i = \lambda(u) U_i + 2\omega_i - 2\bar{U}_o n_i,$$

$\lambda(u)$ étant une fonction arbitraire de u. Les seconds membres de (5) contiennent $\bar{U}_o$ qui dépend en apparence des fonctions $\bar{U}_i$. En réalité on a de (5)

$$\Sigma \bar{U}\omega = \bar{U}_o = \lambda \Sigma U\omega - 2\bar{U}_o \Sigma n\omega$$

donc

$$\bar{U}_o = a\lambda U_o, \quad a = \frac{1}{1 + 2\Sigma n\omega}, \quad U_o = \Sigma U\omega.$$

Le sfonctions $\bar{U}_i$ sont donc déterminées, à la fonction arbitraire $\lambda(u)$ près, par

$$\bar{U}_i = \lambda (U_i - 2aU_o n_i) + 2\omega_i$$

228. Cela étant établi, posons

$$\theta = \Sigma \bar{U} t.$$

On a, à l'aide (5),

$$\theta_v = mr\Sigma\bar{U}(s_v + as) = mr(S_v + aS) = T_v$$

donc

$$\theta = \Sigma \bar{U} t = T + \varphi(u).$$

D'autre part, il est facile de voir que

$$\Sigma \bar{U} x'' = -2A\varphi(u)$$

et

$$\Sigma \omega x'' = A,$$

donc,

$$\Sigma [\bar{U} + 2\omega\varphi(u)] x'' = o,$$

Digitized by Google

qui prouve effectivement que la surface (x'') a les lignes de courbure $u = \text{const.}$ sphériques, situées sur les sphères de coordonnées

$$\bar{U}_i + 2\varphi(u)\omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Ces sphères passent par un point fixe p $(p_i, i = 1, 2, .., 5)$ si l'on a

$$\Sigma\,(U + 2\varphi\omega)\,p = 0$$

ou, en tenant compte de (6)

$$\lambda\,(\Sigma U p - 2aU_0\,\Sigma np) + 2\,(1 + \varphi)\,\Sigma\omega p = 0,$$

qui détermine la fonction $\lambda\,(u)$. Le théorème de *Dobriner* est complètement démontré.

Par une inversion par rapport au point fixe p, on réduit l'étude des surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système aux surfaces à lignes de courbure planes dans un système. C'est là l'importance du théorème de *Dobriner*.

CHAPITRE XII.

LIGNES ASYMPTOTIQUES.

I. HISTORIQUE ET DÉFINITION.

229. L'origine de la théorie des lignes asymptotiques se trouve dans la théorie des surfaces de *Dupin* (Développements de géométrie, 1813).

On dit qu'une courbe C tracée sur une surface S d'un E_3 est *ligne asymptotique* de cette surface, si ses tangentes sont conjuguées avec elles-mêmes sur la surface.

Les plans tangents à S le long de C ont alors cette courbe comme arête de rebroussement.

Soient, en coordonnées cartésiennes

$$z = f\,(x, y)$$

l'équation de S et

$$x = x\,(t), \quad y = y\,(t), \quad z = z\,(t)$$

la représentation paramétrique d'une ligne asymptotique C. On a d'abord

$$(1) \qquad z' = px' + qy',$$

où, comme d'habitude,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \; y' = \frac{dy}{dt}, \; z' = \frac{dz}{dt}; \; p = \frac{\delta z}{\delta x}, \; q = \frac{\delta z}{\delta y}.$$

Digitized by Google

La caractéristique de l'enveloppe du plan tangent à S

$$(2)\quad Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

le long de C est déterminée par (2) et, en vertu de (1), par

$$(3)\quad p'(X - x) + q'(Y - y) = 0$$

où

$$p' = \frac{dp}{dt},\ q' = \frac{dq}{dt}.$$

Cette droite doit se confondre, si C est une ligne asymptotique de S, avec la tangente

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}$$

à C. On obtient ainsi deux relations, dont la premiére tirée de (2) est (1) et la seconde tirée de (3) est

$$p'x' + q'y' = 0.$$

Cette relation, qui exprime que C est une ligne asymptotique, ne change pas lorsqu'on change la variable indépendante t. On l'écrit d'habitude sous la forme

$$(4)\quad dpdx + dqdy = 0,$$

ou, comme

$$dp = rdx + sdy,\quad dq = sdx + tdy$$

où

$$r = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2},\ s = \frac{\delta^2 z}{\delta x\,\delta y},\ t = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2},$$

sous la forme

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0.$$

On a donc sur chaque surface non développable ($rt - s^2 \neq 0$) deux familles distinctes de lignes asymptotiques, réelles ou imaginaires selon que la région de la surface est hyperbolique ($rt - s^2 < 0$) ou éliptique ($rt - s^2 > 0$).

230. Une droite appartenant à une surface en est évidement une ligne asymptotique. On connaît donc les lignes asymptotiques d'une surface du second ordre: ce sont ses génératrices rectilignes.

Les génératrices rectilignes d'une surface réglée constituent ainsi une des familles des lignes asymptotiques de cette surface.

II. REPRÉSENTATION AFFINE DES SURFACES.

231. Etant donnée une surface S d'un E_3, rapportée à un système de coordonnées curvilignes (u,v), les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point générateur

Digitized by Google

M de la surface peuvent être regardées comme solutions d'un système de la forme

$$(I)\quad \begin{cases} \theta_{uu} = a\,\theta_u + b\,\theta_v + c\,\theta, \\ \theta_{uv} = a'\theta_u + b'\theta_v + c'\theta, \\ \theta_{vv} = a''\theta_u + b''\theta_v + c''\theta, \end{cases}$$

où les a, b, c sont des fonctions de u et v que l'on détermine de la manière suivante. Prenons la première équation et écrivons qu'elle est vérifiée par x, y et z. On a trois relations linéaires, d'où l'on peut tirer a, b, c, à moins que

$$|x_u\ x_v\ x| = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que dans le cas où S est un cône ayant le sommet à l'origine [1]).

Le système (I) définit, en même temps que S, toute autre surface que l'on en déduit par une transformation *affine* qui ne change pas l'origine, c'est-à-dire par une transformation linéaire et homogène:

$$(II)\quad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

les α, β, γ étant des constantes telles que le déterminant des formes linéaires de (II) soit différent de zéro.

Réciproquement, *tout système* (I), *complètement intégrable, définit, par trois solutions quelconque linéairement indépendantes, une surface* S *et ses transformations affines.*

On peut dire encore que *le système* (I) *définit une surface* S *à une transformation affine, de la forme* (II), *prés.*

232. Nous allons déterminer maintenant les lignes asymptotiques de la surface S définie par le système I.

Le long d'une ligne asymptotique de S on a la relation (4), ou, à l'aide de

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

la relation équivalente

$$(5)\quad d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y.$$

Or, on a

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv,\quad d^2x = x_{uu}\,du^2 + 2x_{uv}\,du\,dv + x_{vv}\,dv^2 + x_u\,d^2u + x_v\,d^2v$$

et des relations analogues pour y et z, et la relation (5) devient alors

$$(z_{uu} - px_{uu} - qy_{uu})\,du^2 + 2(z_{uv} - px_{uv} - qy_{uv})\,du\,dv + (z_{vv} - px_{vv} - qy_{vv})\,dv^2 = 0.$$

---

[1]) Dans ce cas en effet x, y, z sont des solutions d'une équation de la forme $A\theta_u + B\theta_v + C\theta = 0$, donc $x = f_1(t)\,\varphi(u, v)$, $y = f_2(t)\,\varphi(u, v)$, $z = f_3(t)\,\varphi(u, v)$, avec $t = f(u, v)$.

Digitized by Google

Celle-ci, en tenant compte de (I) et en supprimant le facteur $z - px - qy$, qui est nul seulement pour les cônes ayant le sommet à l'origine — surfaces que nous laisserons de côté —, devient

$$cdu^2 + 2c'\,du\,dv + c''\,dv^2 = 0,$$

qui donne ainsi les lignes asymptotiques de S.

Il résulte de là manifestement que *sur toutes les surfaces affines définies par le système* (I) *les lignes asymptotiques se correspondent.*

On en conclut encore que *si les courbes coordonnées* (u,v) *sont sur ces surfaces leurs lignes asymptotiques, on a* $c = c'' = 0$.

Remarquons enfin que l'on peut considérer les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point générateur M de la surface S comme les coordonnées projectives du point m où la droite OM, qui joint M à l'origine, coupe un plan fixe ne passant pas par O.

On peut dire alors que *le système* (I) *définit aussi la perspective de* S *sur un plan fixe.*

233. *Théorème de Koenigs.* En relation directe avec la dernière remarque du no. précédent, il y a un remarquable théorème de M. *Koenigs* sur la perspective des lignes asymptotiques sur un plan; à savoir, *cette perspective est un réseau à invariants égaux.*

La démonstration de ce théorème est simple; elle consiste à montrer que les conditions d'intégrabilité du système

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} \theta_{uu} = a\theta_u + b\theta_v \\ \theta_{uv} = a'\theta_u + b'\theta_v + c'\theta, \\ \theta_{vv} = a''\theta_u + b''\theta_v, \end{cases}$$

qui définit en même temps un surface S rapportée à ses lignes asymptotiques et sa perspective sur un plan, conduisent à la relation

$$a'_u = b'_v,$$

qui exprime précisement que cette perspective est un réseau à invariants égaux.

Or, nous obtenons un des groupes des conditions d'intégrabilité en écrivant que l'on a

$$(\theta_{uu})_v = (\theta_{uv})_u$$

ou, en vertu de (I')

$$(a\theta_u + b\theta_v)_v = (a'\theta_u + b'\theta_v + c'\theta)_u,$$

ou encore, en développant et en tenant compte de (I'),

$$\mathrm{A}\,\theta_u + \mathrm{B}\,\theta_v + \mathrm{C}\,\theta = 0$$

qui doit être une identité. On tire de là

$$a_v + a''b = a'_u + a'b' + c',\ b_v + ab' + bb'' = b'_u + a'b + b'^2,\ ac' = c'_u + b'c'.$$

Digitized by Google

comme on a $c' \neq 0$ [1]), le groupe précédent donne

$$(6)\quad a'_u + a'\,b' + c' = a_v + a''\,b,\quad b' = a - (\log c')_u,\quad b'_v = a_v - (\log c')_{uv}.$$

En partant de

$$(\theta_{uv})_v = (\theta_{vv})_u,$$

on a un second groupe de conditions d'intégrabilité, dont on tire

$$(7)\quad b'_v + a'\,b' + c' = b''_u + a''\,b,\quad a' = b'' - (\log c')_v,\quad a'_u = b''_u - (\log c')_{uv}.$$

On a ainsi

$$a'_u - b'_v = a_v - b''_u = b''_u - a_v$$

donc

$$a'_u = b'_v$$

et le théorème de Koenigs est démontré.

234. *Une propriété métrique des surfaces affines.* Le fait que la deuxième équation du système (I') est à invariants égaux conduit à poser

$$(8)\quad a' = \frac{m_v}{m},\quad b' = \frac{m_u}{m},$$

m étant une certaine fonction de u et v définie à un facteur constant prés. Je dis que cette fonction m a une signification géométrique remarquable pour toute surface S déterminée par (I').

Désignons en effet par K la courbure totale de S en un point M et par d la distance de l'origine au plan tangent en M. Si l'on pose

$$\mathrm{D} = \frac{|\,x_{uu}\ x_u\ x_v\,|}{\mathrm{H}},\quad \mathrm{D}' = \frac{|\,x_{uv}\ x_u\ x_v\,|}{\mathrm{H}},\quad \mathrm{D}'' = \frac{|\,x_{vv}\ x_u\ x_v\,|}{\mathrm{H}}$$

où $\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2}$, E, F, G étant les coefficients dans l'élément linéaire de S

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

on a

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{D\,D''} - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{H}^2},\quad d = \frac{|\,x\ x_u\ x_v\,|}{\mathrm{H}}.$$

Comme on a évidemment, à cause de (I'), $\mathrm{D} = \mathrm{D}'' = 0$; il en résulte

$$\frac{\mathrm{K}}{d^4} = -\frac{c'^2}{|\,x\ x_u\ x_v\,|^2}.$$

[1]) Autrement le système (I') admettrait, outre x, y, z, le solution $\theta = 1$ et on aurait $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ et la surface S serait plane.

Digitized by Google

Posons

$$(9)\quad \frac{K}{d^4} = -\frac{1}{n^4},$$

on peut alors prendre

$$n^2 c' = |\ x\ x_u\ x_v\ |,$$

d'où l'on tire, à l'aide de (I),

$$2\frac{n_u}{n} + \frac{c'_u}{c'} = a + b', \quad 2\frac{n_v}{n} + \frac{c'_v}{c'} = b'' + a'$$

et de là, en vertu de (6) et (7)

$$a' = \frac{n_v}{n}, \quad b' = \frac{n_u}{n}$$

qui prouve que l'on a, à l'aide de (8),

$$n = \lambda m, \quad \lambda = \text{const.}$$

La relation (9) devient ainsi

$$\frac{K}{d^4} = -\frac{1}{\lambda^4 . m^4}$$

et elle donne la signification géométrique de m, au facteur constant λ prés.

Si l'on a une deuxième surface S' affine à S, définie par le même système (I') que S, on aura de la même manière

$$\frac{K'}{d'^4} = -\frac{1}{\lambda'^4 m^4}, \quad \lambda' = \text{const.}$$

K' et d' ayant pour S' des significations analogues à K et d pour S. On en conclut

$$(10)\quad \frac{K}{d^4} : \frac{K'}{d'^4} = \text{const.}$$

On a donc le théorème suivant: *Pour deux surfaces* S *et* S' *qui se correspondent par la transformation affine* (II), *on a aux points correspondants la relation* (10).

Ce théorème prouve que si en tout point de S on a

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

on a aussi en tout point de la surface affine S'

$$\frac{K'}{d'^4} = \text{const.}$$

mais sur cette classe de surfaces nous reviendrons plus loin.

Digitized by Google

235. *Transformation par polaires réciproques.* Considérons la surface Σ, polaire réciproque de la surface S définie par (I'), par rapport à la sphère de rayon 1 ayant son centre à l'origine. Elle vérifie, avec ses transformées affines, un système de la même forme que (I')

$$(III)\quad \begin{cases} \omega_{uu} = a\,\omega_u + \beta\,\omega_v + \gamma\,\omega, \\ \omega_{uv} = a'\,\omega_u + \beta'\,\omega_v + \gamma'\,\omega, \\ \omega_{vv} = a''\,\omega_u + \beta''\,\omega_v + \gamma''\,\omega. \end{cases}$$

Nous allons voir que l'on peut calculer les coefficients de ce système à l'aide de ceux du système (I'). On a, en effet

$$\begin{aligned} \xi\,x + \eta\,y + \zeta\,z &= 1, \\ \xi\,x_u + \eta\,y_u + \zeta\,z_u &= 0, \\ \xi\,x_v + \eta\,y_v + \zeta\,z_v &= 0, \end{aligned}$$

$\mu\,(\xi, \eta, \zeta)$ étant le point générateur de Σ, ou, en employant la notation bien comme de *Lamé*

$$S\,\xi\,x = 1, \quad S\,\xi\,x_u = 0, \quad S\,\xi\,x_v = 0.$$

Des deux dernières de ces relations on tire, en tenant compte de (I')

$$(11)\quad S\,\xi_u\,x_u = 0, \quad S\,\xi_v\,x_v = 0, \quad S\,\xi_v\,x_u = S\,\xi_u\,x_v = -c'$$

et de la première

$$S\,x\,\xi_u = 0, \quad S\,x\,\xi_v = 0,$$

qui conduit, à l'aide du système (III), à

$$\Sigma\,x_u\,\xi_u = \gamma = 0, \quad \Sigma\,x_v\,\xi_v = \gamma'' = 0, \quad S\,\xi_v\,x_u = S\,\xi_v\,x_u = -\gamma' = -c'$$

Il résulte de là le théorème bien connu:

Sur deux surfaces polaires réciproques les lignes asymptotiques se correspondent.

Les relations (11) donnent ensuite

$$S\,x_u\,\xi_{uu} + S\,\xi_u\,x_{uu} = 0, \quad S\,x_v\,\xi_{vv} + S\,\xi_v\,x_{vv} = 0,$$

qui, à l'aide de (I') et (III), deviennent

$$\beta = -b, \quad a'' = -a'',$$

et de la même manière

$$S\,\xi_v\,x_{uu} + S\,\xi_{uv}x_u = -c'_u$$

donne

$$\beta' = -a + \frac{c'_u}{c'}$$

qui, à l'aide de (6), devient

$$\beta' = -b'.$$

Digitized by Google

On a aisément aussi

$$a' = -a'.$$

Considérons la relation que nous venons d'employer

$$b' = a - \frac{c'_u}{c'}$$

qui a lieu aussi pour (III)

$$\beta' = a - \frac{\gamma'_u}{\gamma'}.$$

Or $\beta' = -b'$, $\gamma' = c'$, donc

$$a = a - 2b'.$$

On prouve de la même manière que l'on a aussi

$$\beta'' = b'' - 2a'$$

et le système (III) devient

$$(III') \quad \begin{cases} \omega_{uu} = (a - 2b')\,\omega_u - b\,\omega_v, \\ \omega_{uv} = -a'\,\omega_u - b'\,\omega_v + c'\,\omega, \\ \omega_{vv} = -a''\,\omega_u + (b'' - 2a')\,\omega_v. \end{cases}$$

Si l'on pose pour Σ, comme pour S,

$$\frac{K''}{d''^4} = -\frac{1}{n''^4},$$

où K'' est la courbure totale de Σ en μ et d'' la distance de l'origine au plas tangent en μ, on a, comme au no. 234,

$$a' = \frac{n''_v}{n''}, \quad \beta' = \frac{n''_u}{n''},$$

donc

$$a' = -a' = -\frac{n_v}{n} = \frac{n''_v}{n}, \quad \beta' = -b' = -\frac{n_u}{n} = \frac{n''_u}{n},$$

d'où

$$n\,n'' = \text{const.}$$

et de là

$$(12) \quad \frac{K}{d^4} \cdot \frac{K''}{d''^4} = \text{const.}$$

On a donc le théorème suivant:

Pour deux surfaces S *et* Σ, *polaires réciproques par rapport à une quadrique* [1]) *ayant sont centre à l'origine, on a la relation* (12).

[1]) Comme nous pouvons remplacer la surface Σ par une surface affine, cela revient à remplacer la sphère de rayon 1 et ayant son centre à l'origine par une quadrique.

Digitized by Google

236. On peut donner une démonstration géométrique simple pour le théorème précédent.

Désignons par ds et ds'' les éléments d'aire autour de deux points correspondants M et μ des surfaces S et Σ, polaires réciproques par rapport à la sphère de rayon 1 et ayant son centre à l'origine; $d\sigma$ et $d\sigma''$ les éléments d'aire correspondants de leurs représentations sphériques; $\lambda = \cos \widehat{MO\mu}$. On a alors

$$K = \frac{d\sigma}{ds}, \quad K'' = \frac{d\sigma''}{ds''}, \quad \frac{\lambda\, ds''}{d\sigma} = \overline{O\mu}^2, \quad \frac{\lambda\, ds}{d\sigma''} = \overline{OM}^2.$$

Or,

$$OM = \frac{1}{d''}, \quad O\mu = \frac{1}{d}, \quad \lambda = d\,d'',$$

donc

$$\frac{K}{d^4} \times \frac{K''}{d''^4} = 1,$$

qui, par une transformation affine (II), devient la relation (12).

Cette relation prouve que les surfaces S pour lesquelles on a

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.},$$

gardent cette propriété après une transformation par polaires réciproques par rapport à une quadrique ayant le centre à l'origine.

237. *Une nouvelle classe de surfaces.* Nous venons de voir que dans la théorie affine des surfaces il y a une classe remarquable de surfaces que l'on rencontre d'une manière naturelle, ce sont les surfaces pour lesquelles on a

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

L'étude que nous avons faite au no. 234 prouve que l'on a pour cette classe

$$a' = b' = 0$$

et réciproquement. Ces surfaces admettent donc la représentation affine suivante

$$(IV) \quad \begin{cases} \theta_{uu} = a\theta_u + b\theta_v, \\ \theta_{uv} = h\theta, \\ \theta_{vv} = a''\theta_u + b''\theta_v. \end{cases}$$

On a donc le résultat suivant: *Trois solutions linéairement indépendantes d'un système complètement intégrable de la forme* IV *définissent une surface* S, *rapportée à ses lignes asymptotiques, pour laquelle on a*

$$(18) \quad \frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

Cette surface garde cette propriété à la suite d'une transformation affine (no. 234) et à la suite d'une transformation par polaires réciproques (no. 236).

Digitized by Google

238. La propriété caractéristique des surfaces S définies par le système IV est de nature métrique. Il est vrai que nous avons démontré que cet élément métrique ne change pas essentiellement à la suite d'une transformation affine (no. 234, relation (10)). Cependant il est intéressant de donner pour les surfaces S une définition nettement affine.

A cet effet considérons sur S la ligne asymptotique $u = \text{const.}$ Les tangentes aux lignes asymptotiques $v = \text{const.}$, aux points où ces courbes coupent la ligne asymptotique choisie forment une surface réglée R_u, qui peut se confondre avec S, si celle-ci est réglée. On définira de la même manière les surfaces R_v.

Nous appellerons les surfaces R_u et R_v, *les surfaces réglées asymptotiques* attachées à S.

Je dis maintenant que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface* S *jouisse de la propriété* (13) *est que les développables asymptotiques de tous les surfaces* R_u et R_v *soient des cônes ayant le même sommet.* Cette condition est manifestement affine.

Un point $\mu(\xi, \eta, \xi)$ de R_u est donné par

$$\xi = x + tx_u, \quad \eta = y + ty_u, \quad \zeta = z + tz_u, \quad u = \text{const.}$$

Le plan tangent en ce point à R_u a pour équation

$$| X - \xi \ \xi_t \ \xi_v | = 0$$

ou

$$| X - x - tx_u \quad x_u \quad x_v + tx_{uv} | = 0$$

ou encore

$$| X - x \ \ x_u \ \ x_v | + t | X - x \ \ x_u \ \ x_{uv} | = 0.$$

Le plan asymptote de la génératrice rectiligne de R_u qui passe par μ est alors

$$| X - x \quad x_u \quad x_{uv} | = 0$$

et il passe par l'origine si l'on a

$$| x \quad x_u \quad x_{uv} | = b' \ | x \quad x_u \quad x_v | = 0.$$

Comme $| x \ \ x_u \ x_v | \neq 0$, on a $b' = 0$ et de la même manière $a' = 0$. Ce qui prouve notre proposition.

Dans le cas où S *est réglée, les surfaces* R_u, *par exemple se confondent avec* S, *tandis que* R_v *sont des quadriques ayant le même centre* O.

239. Les conditions d'intégrabilité du système IV sont

$$(14) \qquad \begin{aligned} &h_u = ah, \ a_v + a''b = h, \ b_v + bb'' = 0, \\ &h_v = b''h, \ a''_u + aa'' = 0, \ b''_u + a''b = h. \end{aligned}$$

Remarquons qui si l'on a $b = 0$, la première équation de IV montre (no. 31) que les courbes $v = \text{const.}$ sont des droites et la surface S est alors réglée. Il en est de même si $a'' = 0$, mais alors ce sont les courbes $u = \text{const.}$ qui en sont les génératrices rectilignes.

Digitized by Google

Je dis que l'on peut prendre $b = a'' = 0$ et que par conséquent parmi les surfaces S il y en a de doublement réglées, c'est-à-dire des quadriques.

Les relations (14) donnent en effet

$$a = \frac{h_u}{h}, \quad b'' = \frac{h_v}{h}, \quad (\log h)_{uv} = h.$$

La dernière équation — une équation de *Liouville* — a pour intégrale générale

$$h = \frac{2U'V'}{(U+V)^2},$$

U et V étant des fonctions de la variable u et de la variable v respectivement, qui ne peuvent pas se réduire — l'une on l'autre — à des constantes.

Le système IV devient

$$\theta_{uu} = \left(\frac{U''}{U'} - \frac{2U'}{U+V}\right)\theta_u,$$

$$\theta_{uv} = \frac{2U'V'}{(U+V)^2}\theta,$$

$$\theta_{vv} = \left(\frac{V''}{V'} - \frac{2V'}{U+V}\right)\theta_v.$$

En prenant U et V comme nouvelles variables, on réduit le système précédent au suivant

$$\text{IV}' \quad \theta_{uu} = -\frac{2}{u+v}\theta_u, \ \theta_{uv} = \frac{2}{(u+v)^2}\theta, \ \theta_{vv} = -\frac{2}{u+v}\theta_v.$$

L'intégrale générale de la première équation est

$$\theta = \frac{\varphi(v)}{u+v} + \Psi(v)$$

elle satisfait à la seconde si

$$\Psi(v) = -\frac{1}{2}\varphi'(v)$$

et à la troisième si

$$\varphi'''(v) = 0.$$

Celle-ci a pour solutions linéairement indépendantes 1, $2v$, v^2, donc

$$x = \frac{1}{u+v}, \ y = \frac{v-u}{u+v}, \ z = \frac{-uv}{u+v}$$

sont des solutions linéairement indépendants de IV'. Or on a

$$y^2 - 4xz = 1,$$

et la surface S est une quadrique de centre O. Par une transformation affine on a le théorème suivant:

Digitized by Google

Toute quadrique à centre jouit de la propriété

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

240. Considérons maintenant le cas des surfaces simplement réglée, où l'on a par exemple

$$a'' = 0.$$

Alors les relations (14) donnent

$$a = \frac{h_u}{h},\ b'' = \frac{h_v}{h},\ (bh)_v = 0,\ (\log h)_{uv} = h,$$

et on a le système

$$\theta_{uu} = \left(\frac{U''}{U'} - \frac{2U'}{U+V}\right)\theta_u + \frac{\varphi(u)(U+V)^2}{2U'V'}\theta_v$$

$$\theta_{uv} = \frac{2U'V'}{(U+V)^2}\theta,$$

$$\theta_{vv} = \left(\frac{V''}{V'} - \frac{2V'}{U+V}\right)\theta_v.$$

Si l'on change les variables, en prenant U et V comme nouvelles variables, le système précédent se réduit à

$$\theta_{uu} = -\frac{2}{u+v}\theta_u + p(u)(u+v)^2\theta_v,$$

$$\text{IV}''\quad \theta_{uv} = \frac{2}{(u+v)^2}\theta,$$

$$\theta_{vv} = -\frac{2}{u+v}\theta_v.$$

La dernière équation s'intégre immédiatement

$$\theta = \frac{A(u)}{u+v} + B(u)$$

et cette intégrale satisfait à la seconde si

$$B(u) = -\frac{1}{2}A'(u)$$

et à la première si

$$(15)\quad A'''(u) = 2p(u)A(u).$$

La fonction $p(u)$ étant choisie arbitrairement, cette dernière équation admet trois intégrales linéairement indépendantes $A_1(u)$, $A_2(u)$, $A_3(u)$ et alors

$$(16)\quad x = \frac{A_1(u)}{u+v} - \frac{1}{2}A'_1(u),\ y = \frac{A_2(u)}{u+v} - \frac{1}{2}A'_2(u),\ z = \frac{A_3(u)}{u+v} - \frac{1}{2}A'_3(u)$$

Digitized by Google

définissent une surface réglée S, rapportée à ses lignes asymptotiques, le long de laquelle on a

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

241. A la fin du no. 238 nous avons donné la propriété affine qui correspond à la propriété métrique précédente des surfaces (16). Cependant il y en a une autre plus curieuse et plus intéressante.

Nous allons considérer les points flecnodaux (voir no. 40) d'une génératrice $u = \text{const.}$ Nous savons qu'en un tel point il existe une tangente qui coupe la surface en 4 points confondus. Cette tangente touche la ligne asymptotique qui passe par le point flecnodal et en ce point la ligne asymptotique se comporte comme une ligne droite, c'est-à-dire que son plan osculateur y est indéterminé, ou bien encore que l'on a

$$\frac{\delta^2 x}{\delta u^2} : \frac{\delta x}{\delta u} = \frac{\delta^2 y}{\delta u^2} : \frac{\delta y}{\delta u} = \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} : \frac{\delta z}{\delta u}.$$

Or le système IV'', dont les intégrales sont (16), prouve que en un point flecnodal on a

$$u + v = 0,$$

qui définit la *courbe flecnodale* de la surface. Les formules (16), prouvent que la ligne flecnodale est rejetée à l'infini.

On a donc le résultat suivant:

Les surfaces réglées pour lesquelles on a

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

ont leurs lignes flecnodales confondues à l'infini.

La réciproque est vraie [1]).

242. Considérons maintenant le cas général, où dans le système IV on a

$$a''b \neq 0.$$

On tire alors de (14)

$$a = \frac{h_u}{h},\ b = \frac{U}{h},\ a'' = \frac{V}{h},\ b'' = \frac{h_v}{h},\ (\log h)_{uv} = h - \frac{UV}{h^2}.$$

Il est aisé de voir que l'on peut faire un changement de variables tel que l'on ait $U = V = 1$ et le système IV devient

$$(IV''')\quad \theta_{uu} = \frac{h_u}{h}\theta_u + \frac{1}{h}\theta_v,\quad \theta_{uv} = h\,\theta,\quad \theta_{vv} = \frac{1}{h}\theta_u + \frac{h_v}{h}\theta_v$$

[1]) Voir: *Sur certaines courbes gauches* (Annales de l'École Normale supérieure, 1911).

Digitized by Google

où h est une solution de

$$(17) \quad (\log h)_{uv} = h - \frac{1}{h^2}.$$

Or le système IV''' coincide avec le système (6) du no. 175. On a donc le théorème:

La perspective sur un plan des lignes asymptotiques d'une surface S *non réglée pour laquelle on a*

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

est un réseau à invariants égaux et à suite périodique, qui se reproduit après trois transformations de Laplace.

On peut donc appliquer aux surfaces S définies par le système (IV''') les transformations que nous avons données pour les réseaux à invariants égaux et à suite de Laplace périodique.

Comme l'intégration de l'équation (17) et d'autant plus celle du système (IV''') est très difficile, nous nous bornons à considérer le cas particulier où

$$h = 1$$

qui vérifie (17). Le système IV''' devient

$$\theta_{uu} = \theta_v, \quad \theta_{uv} = \theta, \quad \theta_{vv} = \theta_u$$

et admet une solution de la forme

$$\theta = e^{au + bv}$$

si

$$a^2 = b, \quad ab = 1, \quad b^2 = a,$$

c'est-à-dire si

$$a^3 = 1, \quad b = a^2.$$

On a ainsi les solutions linéairement indépendantes

$$x = e^{a_1 u + a_1^2 v}, \quad y = e^{a_2 u + a_2^2 v}, \quad z = e^{a_3 u + a_3^2 v}$$

avec

$$a_i^3 = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

donc

$$x\,y\,z = 1.$$

Cette surface, de même que

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)\ (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)\ (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) = 1,$$

en particulier la surface de révolution

$$z(x^2 + y^2) = 1,$$

Digitized by Google

jouissent toutes de la propriété

$$K : d^4 = \text{const.}$$

243. Si l'on considère le système (I') (no. 233) et que l'on suppose $a' = 0$, on a pour la surface S correspondante

$$\frac{K}{d^4} = f(u).$$

On a ainsi une classe de surfaces plus générale que celle que nous venons d'étudier et dont la recherche ne serait pas dépourvue d'intérêt.

III. REPRÉSENTATION EN COORDONNÉES DE DROITES. IMAGE.

244. *Lignes asymptotiques en coordonnées projectives.* Nous avons vu au no. 233, que si les courbes coordonnées u et v d'une surface S sont les lignes asymptotiques de cette surface les coordonnées x, y, z d'un point générateur sont des solutions du système (I'), en particulier des équations

$$\theta_{uu} = a\,\theta_u + b\,\theta_v\,, \quad \theta_{vv} = a''\,\theta_u + b''\,\theta_v\,,$$

qui admettent aussi la solution $\theta = 1$.

En multipliant x, y, z et 1 par un même facteur et en faisant ensuite une transformation linéaire à coefficients constants, on obtient le résultat suivant:

Les coordonnées projectives x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) d'un point x, mobile sur une surface S, *rapportée à ses lignes asymptotiques, vérifient un système de la forme*

$$(V) \qquad \begin{aligned} x_{uu} &= p\,x_u + q\,x_v + r\,x, \\ x_{vv} &= p'\,x_u + q'\,x_v + r'\,x. \end{aligned}$$

Réciproquement, si le point x d'un E_3 vérifie un tel système, il décrit une surface S, rapportée à ses lignes asymptotiques. En effet, les deux équations du système expriment que le plan tangent en x à S est le plan osculateur de la courbe $v = \text{const.}$ et de la courbe $u = \text{const.}$ qui y passe.

C'est ce système, un peu simplifié, qui a été pris comme point de départ pour l'étude des propriétés différentielles projectives des surfaces par M. *Wilczynski* dans ses mémoires remarquables sur la théorie des surfaces[1]).

245. *Lignes asymptotiques en coordonnées de droites.* Considérons une surface S rapportée à ses lignes asymptotiques u et v. Les coordonnées projectives d'un point générateur M vérifiant le système (V), les coordonnées pluckériennes (no. 12) des tangentes en M aux lignes asymptotiques $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$

$$p_{ik} = x_i \frac{\partial x_k}{\partial u} - x_k \frac{\partial x_i}{\partial u}, \quad q_{ik} = x_i \frac{\partial x_k}{\partial v} - x_k \frac{\partial x_i}{\partial v}, \quad i \neq k = 1, 2, 3, 4,$$

[1]) Transactions of the american mathem. Soc., 1907, 1908.

Digitized by Google

satisfont aux relations

$$\frac{\delta p_{ik}}{\delta u} = p \cdot p_{ik} + q \cdot q_{ik},$$

$$\frac{\delta q_{ik}}{\delta v} = p' \cdot p_{ik} + q' \cdot q_{ik}.$$

On peut remplacer les coordonnées p_{ik} et q_{ik} par d'autres liées linéairement à celles-là, en particulier par des coordonnées kleinéennes (no. 15) x_i et y_i ($i = 1, 2, .., 6$). On aura alors la systéme

$$\text{VI} \quad x_u = p\,x + q\,y, \quad y_v = p'\,x + q'\,y.$$

Considérons maintenant les images x et y des deux tangentes aux lignes asymptotiques $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$ qui se croisent au point M. Les deux points x et y sont situés sur un même espace quadratique Q_4 de l'espace projectif E_5 (no. 14). Comme les tangentes de coordonnées x_i et y_i sont concourantes, la droite xy est une génératrice de Q_4 (no. 15). Cette génératrice décrit, lorsque les variables u et v varient, une congruence (no. 68), dont les réseau focaux sont décrits par les points x et y. Les relations (VI) justifient pleinement ces affirmations.

Remarquons maintenant que si $q = 0$, le réseau (x) se réduit à une courbe; c'est l'image de la surface S, qui dans ce cas est réglée, comme le montre le système (V). L'autre réseau focal (y) donne les lignes asymptotiques non rectilignes de la surface.

Si $p' = q = 0$, les deux réseaux (x) et (y) se réduisent à des courbes et la surface S est une quadrique.

On a donc dans tous les cas le résultat suivant: *L'image dans l'espace* E_5 *d'une surface* S *rapportée à ses lignes asymptotiques est une congruence quadratique* (no. 97).

Ajoutons encore que dans cette image de S, chaque point de la génératrice xy de Q_4 est l'image d'une tangente en M de S. On pourrait dire que xy est l'image du plan tangent à S en M; d'une manière plus précise, la droite xy est l'image du faisceau des tangentes en M à S.

246. Réciproquement, *toute congruence quadratique de* E_5 *peut être considérée comme l'image d'une surface* S *rapportée à ses lignes asymptotique.*

Soit en effet (xy) une congruence tracée sur l'espace quadratique Q_4 et définie, à l'aide de ses réseaux focaux (x) et (y), par le système (VI).

La droite xy est l'image d'un faisceau plan de E_3, soit M le sommet de ce faisceau. Lorsque u et v varient, M décrit une surface S. Je dis que S est tangente en M au plan du faisceau qui correspond à ce points.

Si nous prenons $v = v_0$, le point x de Q_4, décrit une courbe tangente à xy, image d'une développable, formée par les tangentes d'une courbe[1]) V_0 de E_3. Con-

[1]) Nous laissons ainsi de côté le cas où la développable serait un cône.

Digitized by Google

sidérons les tangentes de cette courbe qui correspondent aux valeurs u_0 et $u_0 + h$ de u. Ces tangentes, à des infiniments petits d'ordre supérieur, se coupent (no. 38). Leurs images sont x et un point $\bar{x}$ voisin de x. Le point M est donc le point de contact avec V_0 de la tangente qui a pour image x.

Le plan des deux tangentes voisines devient à la limite, pour $h = 0$, le plan osculateur à V_0 au point u_0 ou M.

Donc, $x\,y$ est, pour $u = u_0$, $v = v_0$, l'image d'un faisceau plan ayant comme sommet le point M ($u = u_0$) de la courbe V_0 et comme plan le plan osculateur de V_0 en M.

Si nous étions parti de $u = u_0$, on aurait trouvé évidemment le même faisceau, dont le sommet et plan sont un point M et le plan osculateur d'une courbe U_0 pour $v = v_0$.

La courbe U_0 a donc le point M ($u = u_0$, $v = v_0$) commun avec V_0 et en ce point le même plan osculateur.

Si nous faisons varier v (ensuite u) en partant de v_0, on aura une courbe variable V, qui, en partant de V_0, s'appuyera continuellement sur la courbe U_0. Elle décrit donc une surface S sur laquelle les courbes U et V sont des lignes asymptotiques et dont l'image est manifestement la congruence quadratique ($x\,y$).

CHAPITRE XIII.

CONGRUENCES W.

I. HISTORIQUE ET DÉFINITION.

247. C'est *Weingarten*, en 1863 (Journal de Crelle, vol. LXII, p. 160—173), qui s'est occupé pour la première fois d'une classe de surfaces, qui portent son nom, *surfaces de Weingarten*, ou plus simplement *surfaces* W, comme les a appelées M. *Bianchi*[1]). Ces surfaces remarquables sont définies par la propriété que leurs rayons principaux de courbure sont liés par une relation. Il résulte de cette définition que les surfaces minima, les surfaces à courbure moyenne constante et celles à courbure totale constante sont des surfaces W.

Weingarten a montré l'identité de la recherche des surfaces W et de celle de la déformation des surfaces de révolution. Ce n'est pas là la propriété des surfaces W qui nous intéresse ici.

La propriété qui a conduit à la notion de *congruence W*, notion capitale dans la géométrie différentielle moderne, a été découverte par *Ribaucour* en 1872 (C.

[1]) Il ne faudra pas confondre ces surfaces W avec les surfaces W de Klein et Lie, qui sont des surfaces tétraédrales, invariables à la suite d'une transformation projective (voir no. 184).

Digitized by Google

R. LXXIV, p. 1399). Il a prouvé que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit W est que sur les deux nappes de la congruence, formée par les normales de la surface, il y ait correspondance entre leurs lignes asymptotiques.

C'est M. *Bianchi* qui a donné le nom de congruence de *Weingarten*, ou *congruence W*, à toute congruence de droites telle qu'il y ait correspondance entre les lignes asymptotiques des deux surfaces focales. Il aurait été peut être plus juste d'appeler ces congruences d'après le nom du géomètre qui a trouvé la propriété caractéristique, mais les *congruences de Ribaucour* ont une autre signification, tant il est difficile de désigner les découvertes géométriques par les noms de leurs auteurs.

En adoptant la nomenclature de M. *Bianchi*, on peut dire que les normales d'une surface W forment une congruence W.

248. Pour représenter les congruences W, M. *Guichard* a donné une méthode (C.R., 1890), où il emploit les formules classiques de *Lelieuvre*.

Comme ces formules correspondent à une théorie métrique des surfaces, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de M. *Darboux* (Tome IV, p. 52 et suiv.) ou à celui de M. *Bianchi* (Tome II, p. 51 et suiv.), en nous bornant ici à quelques indications.

Occupons-nous tout d'abord des formules de Lelieuvre. A cet effet considérons la polaire réciproque Σ de la surface donnée S par rapport à une sphère. Si S est rapportée à ses lignes asymptotiques, Σ l'est aussi. On a pour ces surfaces les systèmes I′ et III′ (no. 233 et 235) et les relations

$$S\,\xi\,x_u = 0, \quad S\,\xi\,x_v = 0, \quad S\,\xi_u\,x_u = 0, \quad S\,\xi_v\,x_v = 0,$$

auxquelles ou peut ajouter

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{d^2}.$$

Comme la seconde équation de III′ est à invariants égaux, on peut la ramener à la forme réduite en posant

$$\xi = \varrho l, \quad \eta = \varrho\, m, \quad \zeta = \varrho\, n$$

où l'on peut prendre

$$\varrho^4 = \frac{-K}{d^4},$$

donc

$$l^2 + m^2 + n^2 = \sqrt{-K},$$

à un facteur constant près. Les fonctions l, m, n, sont des solutions d'une équation de la forme

$$(1)\quad \sigma_{uv} = h\,\sigma.$$

Digitized by Google

On a les relations

$$S\,l\,x_u = 0,\quad S\,l\,x_v = 0,\quad S\,l_u\,x_u = 0,\quad S\,l_v\,x_v = 0,$$

d'où

$$x_u = \lambda \begin{vmatrix} m & n \\ m_u & n_u \end{vmatrix},\quad x_v = \mu \begin{vmatrix} m & n \\ m_v & n_v \end{vmatrix}$$

et des formules analogues pour y et z. On en déduit

$$\lambda_v \begin{vmatrix} m & n \\ m_u & n_u \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} m_v & n_v \\ m_u & n_u \end{vmatrix} = \mu_u \begin{vmatrix} m & n \\ m_v & n_v \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} m_u & n_u \\ m_v & n_v \end{vmatrix}$$

et deux autres relations analogues. On en tire

$$\lambda\,|\,l\,l_v\,l_u\,| = \mu\,|\,l\,l_u\,l_v\,|.$$

Comme

$$|\,l\;l_u\;l_v\;| \neq 0,$$

on a

$$\mu = -\lambda.$$

Il est aisé de voir que $\lambda_v = \lambda_u = 0$, donc λ =const. On peut donc poser

$$(2)\quad x_u = \begin{vmatrix} m & n \\ m_u & n_u \end{vmatrix},\quad x_v = -\begin{vmatrix} m & n \\ m_v & n_v \end{vmatrix}.$$

Ce sont les formules de *Lelieuvre*.

On peut donner maintenant les formules de M. Guichard qui définissent l'autre nappe S′ de la congruence W.

Si R est une solution de (1) et l', m', n' les transformées de Koenigs-Moutard de l, m, n, définies par

$$(l'+l)_u = \frac{R_u}{R}(l-l'),\quad (l'-l)_v = -\frac{R_v}{R}(l+l'),\ldots,$$

la surface S' est déterminée par

$$x' = x + \begin{vmatrix} m' & n' \\ m & n \end{vmatrix},\quad y' = y + \begin{vmatrix} n' & l' \\ n & l \end{vmatrix},\quad z' = z + \begin{vmatrix} l' & m' \\ l & m \end{vmatrix}.$$

Ce sont les formules de M. *Guichard*.

II. IMAGE ET THÉORÈME DE DARBOUX.

249. *Théorème de Darboux.* Etant donnée une surface S rapportée à ses lignes asymptotiques, cherchons à déterminer une autre surface, rapportée aussi à ses lignes asymptotiques et telle que la droite qui joint les points correspondants décrive une congruence W.

Digitized by Google

Nous nous servirons de l'image de S par une congruence quadratique (xy) de E_5 et nous lui appliquons une transformation de Ribaucour (voir no. 97). On obtient ainsi une autre congruence quadratique $(x'y')$ qui est l'image d'une surface cherchée S'. Le point z, commun à xy et $x'y'$, décrit (no. 97) un réseau conjugué aux congruences (xy) et $(x'y')$. Ce point est l'image de la droite qui décrit la congruence W ayant S et S' pour surfaces focales. *L'image de cette congruence est donc un réseau quadratique de* E_5.

Nous voulons démontrer maintenant que toute congruence W, ayant S pour surface focale, peut être déduite par la méthode précédente, à l'aide d'une transformation de Ribaucour.

Soient (xy) et $(x'y')$ les images de S et d'une surface S', constituant avec S les nappes focales d'une congruence W. On peut choisir les coordonnées projectives de x, y, x' et y', de manière à avoir

$$(3)\quad x_v = \alpha\, y,\quad y_u = \beta\, x;\quad x'_v = \alpha'\, y',\quad y'_u = \beta'\, x'.$$

Comme les faisceaux des tangentes aux points correspondants de S et S' ont une droite commune, les droites xy et $x'y'$ de E_5 ont un point commun, donc xx' et yy' aussi. On a par conséquent

$$(4)\quad t = a\, x + a'\, x' = b\, y + b'\, y'.$$

Remarquons encore que l'on a

$$(5)\quad \Sigma\, x^2 = 0,\ \Sigma\, y^2 = 0,\ \Sigma\, x\, y = 0;\ \Sigma\, x'^2 = 0,\ \Sigma\, y'^2 = 0,\ \Sigma\, x'\, y' = 0$$

qui expriment que les congruences (xy) et $(x'y')$ sont quadratiques. On a évidemment

$$(6)\quad \Sigma\, x\, x' \neq 0,$$

autrement toute tangente de S' rencontrerait toutes les tangentes de S.

Dans (4) on a $b' \neq 0$, donc

$$y' = -\frac{b}{b'}\, y + \frac{a}{b'}\, x + \frac{a'}{b'}\, x'$$

et alors de (3)

$$(7)\quad x'_v = a'\left(-\frac{b}{b'}\, y + \frac{a}{b'}\, x + \frac{a'}{b'}\, x'\right),$$

$$\frac{a}{b'}\, x_u + \frac{a'}{b'}\, x'_u = (\ )\, y + (\ )\, x + (\ )\, x',$$

ou

$$(8)\quad x'_u = -\frac{a}{a'}\, x_u + (\ )\, y + (\ )\, x + (\ )\, x'$$

De (7) et (8) on tire une relation de la forme suivante

$$(9)\quad \left(\frac{a}{a'}\right)_v x_u = (\ )\, y_v + (\ )\, y + (\ )\, x + (\ )\, x',$$

Digitized by Google

qui doit être une identité, autrement en multipliant par x les deux membre et en faisant la somme pour les 6 coordonnées, le coefficient de x' serait nul, ce qui serait absurde, car cela signifierait que les tangentes en x et y, aux courbes $v = c$ et $u = c'$ respectivement, se couperaient. On a donc en particulier

$$\left(\frac{a}{a'}\right)_v = 0$$

et on trouverait de la même manière

$$\left(\frac{b}{b'}\right)_u = 0.$$

Il est maintenant aisé de prouver que le point t, commun à xx' et yy', décrit un réseau harmonique à (xy) et $(x'y')$. On a en effet

$$t = ax + a'x' = by + b'y',$$

$$t_u = by_u + b'y'_u + b_u y + b'_u y' = b\beta x + b'\beta' x' + b_u y + b'_u y'$$

et comme

$$\frac{b_u}{b} = \frac{b'_u}{b'} = \mathrm{B},$$

$$t_u = (b\beta + \mathrm{B}a)x + (b'\beta' + \mathrm{B}\,a')x'.$$

De la même manière

$$t_v = (a\alpha + \mathrm{A}b)y + (a'\alpha' + \mathrm{A}b')y'$$

et

$$t_{uv} = (\ )\,x + (\ )\,y + (\ )\,x'.$$

Ces relations prouvent notre affirmation. On voit ainsi que (x) et (x') sont conjugués à une même congruence, ce qui suffit pour voir que (x') es déduit de (x) par une transformation de Ribaucour.

On peut énoncer ce résultat sous la forme suivante: *Toute congruence* W *de notre espace a pour image un réseau quadratique de* E_5. C'est la première partie du théorème de Darboux.

Réciproquement, étant donné un réseau quadratique (z) de E_5, je dis que c'est l'image d'une congruence W le notre espace. Nous supposons que les tangentes du réseau (x) ne forment pas des congruences quadratiques. On a alors (no. 128) deux congruences conjuguées à (z) qui sont quadratiques et qui sont par conséquent les images de deux surfaces focales d'une congruence W.

Le théorème de Darboux (Tome II, p. 345) est ainsi complètement démontré.

250. *Théorème de permutabilité.* Nous venons de voir qu'une transformation de Ribaucour, appliquée à un des réseaux focaux d'une congruence quadratique de E_5, conduit à l'image d'une congruence W de notre espace.

Il y a lieu de faire intervenir ici la théorème de permutabilité que nous avons établi (no. 97 bis) pour tous les réseaux quadratiques. On obtient alors le résultat suivant:

Digitized by Google

Si l'on considère deux congruences W *ayant une même surface focale* S *et dont les autres surfaces focales sont respectivement* S′ *et* S″, *il existe* ∞^1 *autres surfaces* $\overline{S}$ *qui forment chacune avec* S′ *et* S″, *les surfaces focales de deux autres congruences* W.

Comme les points x, x', x'', $\overline{x}$ *du* no. 97 ter sont dans un même plan, on a la proposition suivante: *Les tangentes aux lignes asymptotiques* $v = \text{const.}$ *aux points correspondants*, M, M′, M″ et $\overline{M}$ des *surfaces* S, S′, S″ *et* $\overline{S}$ *sont* (no. 21) *les génératrices d'une même quadrique. Il en est de même des tangentes aux lignes asymptotiques* $u = \text{const.}$

On peut appliquer aussi le théorème de permutabilité à un réseau quadratique quelconque de E_5. On aura alors une transformation des congruences W en congruences W, qui a des relations étroites avec les propositions précédentes.

III. RÉSEAUX R.

251. Parmi les réseaux tracés sur une variété quadratique non singulière Q_4 de E_5, il y a une classe particulièrement remarquable, les réseaux à invariants égaux. Un réseau (x) de cette classe est l'image d'une congruence W spéciale, dont il convient d'étudier les propriétés.

A cet effet, considérons les deux congruences quadratiques $(xy'z')$ et $(xy''z'')$, conjuguées (no. 128) à (x): ce sont les images des surfaces focales S′ et S″ de la congruence W ayant (x) pour image.

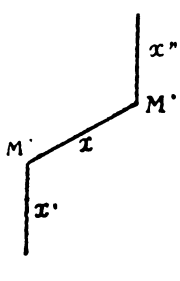
Selon le théorème de *Koenigs-Moutard* (no. 85) le conjugué harmonique x' de x, par rapport aux foyers y' et z', de $xy'z'$, de même que le conjugué harmonique x'' de x par rapport à y'' et z'', décrivent, comme x, des réseaux à invariants égaux (x') et (x''), tracés manifestement sur la variété quadratique Q_4.

Si l'on part de (x'), comme nous sommes partis de (x), on retrouverait d'abord (x) et un autre réseau quadratique à invariants égaux et ainsi de suite.

On obtiendra ainsi une succession, en général indéfinie, de réseaux à invariants égaux tracés sur Q_4.

252. Je dis maintenant que la succession précédente est l'image des congruences d'une suite de Laplace.

En effet, x et x' sont les images de deux tangentes de la surface S′, ayant pour image la congruence quadratique $(xy'z')$. Comme x et x' sont conjugués harmoniques par rapport aux foyers y' et z', les tangentes correspondantes sont deux tangentes conjuguées de S′. De même x et x'' sont les images de deux tangentes conjuguées de S″. On a alors la figure suivante. D'autre part (x) étant l'image d'une congruence W, qui fait correspondre les lignes asymptotiques de S′ et S″, elle fait correspondre aussi les courbes conjuguées. On voit ainsi que x', x et x'' sont les images des tangentes successives dans une suite de Laplace et qu'il en est de même de l'image de toute la succession déduite de (x).



Digitized by Google

Remarquons encore la propriété caractéristique de la suite de Laplace ainsi obtenue: *toutes ses congruences sont des congruences* W.

253. Nous voulons actuellement préciser la proposition à laquelle nous sommes arrivés.

Considérons un réseau de notre espace projectif E_3 et supposons que les tangentes du réseau forment des congruences W. Les images de ses congruences sont deux réseaux (x) et (x') tracés sur Q_4. Comme x et x' sont les images de deux tangentes conjuguées de E_3, ils sont conjugués harmoniques par rapport aux foyers y' et z' de la congruence $(x\,x'\,y'\,z')$ qui est l'image de la surface de E_3. Alors (no. 86) les réseaux (x) et (x') sont à invariants égaux et nous retombons sur la succession des n^{os} précédents.

On peut donc énoncer la proposition suivante: *Si deux congruences consécutives d'une suite de Laplace sont* W, *il en est de même de toutes les autres congruences de la suite.*

On a ainsi, dans E_3, des suites de Laplace dont toutes les congruences sont W. Nous dirons d'un réseau quelconque de cette suite que c'est un *réseau R.*

Un réseau R est donc, d'après la proposition précédente, *un réseau dont les congruences* (no. 67) *sont* W.

Ces réseaux ont été d'abord mentionnés par M. *Demoulin*, étudiés ensuite par l'auteur de cet ouvrage et M. Demoulin.

254. Un réseau R, comme tout réseau de notre espace, qui n'est pas tracé sur une surface développable, peut être défini projectivement (no. 60) par un système de la forme

$$(1)\quad x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0,$$
$$x_{uu} + m\,x_{vv} + p\,x_u + q\,x_v + r\,x = 0,\quad m \neq 0$$

complètement intégrable. On peut évidemment remplacer la seconde équation par la suivante

$$(2)\quad x_{-2} + m\,x_2 + \alpha x_{-1} + \beta\,x_1 + \gamma x = 0.$$

Il est nécessaire pour notre étude de déterminer les lignes asymptotiques des surfaces définiés par le système précédent. Or, le long d'une courbe de la surface les variables u et v sont des fonctions d'un paramétre t, et alors

$$x' = x_u\,u' + x_v\,v',\quad x'' = x_{uu}\,u'^2 + 2\,x_{uv}\,u'\,v' + x_{vv}\,v'^2 + x_u\,u'' + x_v\,v''$$

ou

$$x'' = (v'^2 - m\,u'^2)\,x_{vv} + (\,)\,x_u + (\,)\,x_v + (\,)\,x.$$

Le plan osculateur de la courbe, déterminé par les points x, x', x'', sera confondu

Digitized by Google

avec le plan tangent à la surface, déterminé par x, x_u, x_v, si l'on a

$$v'^2 - m\,u'^2 = 0.$$

Cette équation, ou mieux

$$(3)\quad d\,v^2 - m\,d\,u^2 = 0$$

est donc l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface.

Il s'agit maintenant d'écrire que le réseau défini par les équations (1) et (2) est R, ou bien qu'il y a correspondance des lignes asymptotiques sur les surfaces (x), (x_1) et (x_{-1}).

A cet effet posons d'abord

$$\xi = x_1$$

qui décrit le réseau $(\xi) \equiv (x_1)$, premier transformé de Laplace de (x) dans le sens des courbes v. On a

$$\xi_1 = x_2,\quad \xi_2 = x_3,\quad \xi_{-1} = h\,x,\quad \xi_{-2} = h\,x_{-1}.$$

Cela étant, dérivons (2) par rapport à v. On obtient

$$-a\,x_{-2} + k_{-1}\,x_{-1} + m_v\,x_2 + m\,(x_3 - a_2\,x_2) + a\,x_{-1}$$
$$+ a\,(-a\;x_{-1} + k\,x) + \beta\,(x_2 - a_1\,x_1) + \beta_v\,x_1 + \gamma\,(x_1 - a\,x) + \gamma_v\,x = 0,$$

ou, en tenant compte de (2)

$$(a_v + k_{-1})\,x_{-1} + m\,x_3 + (\,)\,x + (\,)\,x_2 + (\,)\,x_1 = 0$$

ou enfin

$$\frac{a_v + k_{-1}}{h}\,\xi_{-2} + m\,\xi_2 + (\,)\,\xi_{-1} + (\,)\,\xi_1 + (\,)\,\xi = 0.$$

Les lignes asymptotiques de (x_1) sont données par

$$(a_v + k_{-1})\,d\,v^2 - h\,m\,d\,u^2 = 0$$

et celles correspondent à celles de (x) si cette équation est identique à (3), donc

$$(4)\quad a_v = h - k_{-1}.$$

Si l'on pose

$$\eta = x_{-1}$$

et qu'on fasse un calcul analogue au précédent, on trouve que les lignes asymptotiques de (x_{-1}) correspondent à celles de (x), si l'on a

$$(5)\quad \left(\frac{\beta}{m}\right)_u = k - h_1.$$

Nous allons considérer actuellement les conditions d'intégrabilité du système formé par les équations (1) et (2). Nous avons montré au no. 115 comment on trouve ces conditions.

Digitized by Google

Nous dérivons (2) par rapport à v et nous éliminons x_{-2}. On obtient une relation linéaire entre x_{-1}, x, x_1, x_2 et x_3, que nous avons déjà écrite, mais que nous écrivons cette fois complètement

$$m\,x_3 + (m_v + \beta + a\,m - a_1\,m)\,x_2 + (a_v + k_{-1})\,x_{-1} + (a\,\beta - a_1\,\beta + \gamma)\,x_1 + (\gamma_v + a\,k)\,x = 0.$$

En dérivant celle-ci par rapport à u et en éliminant x_3, on doit retrouver (2). Or, on trouve

$$(a_v + k_{-1})\,x_{-2} + \left[m\,h_2 + (m_v + \beta + a\,m - a_2\,m)_u - \frac{m_u}{m}(m_v + \beta + a\,m - a_2 m)\right] x_2 + (\,)\,x_{-1} + (\,)\,x_1 + (\,)\,x = 0.$$

Il faut donc avoir

$$a_v + k_{-1} = h_2 + \frac{(m_v + \beta + a\,m - a_2\,m)_u}{m} - \frac{m_u}{m^2}(m_v + \beta + a\,m - a_2 m)$$

ou

$$(6)\quad a_v + k_{-1} = h_2 + (\log m)_{vu} + \left(\frac{\beta}{m}\right)_u + (a - a_2)_u.$$

Or, de (4) on a

$$a_v + k_{-1} = h.$$

D'autre part

$$h_1 = 2\,h - k - (\log h)_{uv},$$

$$h_2 = 2\,h_1 - k_1 - (\log h_1)_{uv}, \quad k_1 = h,$$

donc

$$h_2 = h_1 + h - k - (\log h\,h_1)_{uv}.$$

De (5) on a la valeur de $\left(\frac{\beta}{m}\right)_u$, enfin

$$a_1 = a - (\log h)_v, \quad a_2 = a_1 - (\log h_1)_v,$$

donc

$$a_2 = a - (\log h\,h_1)_v$$

et de là

$$(a - a_2)_u = (\log h\,h_1)_{uv}.$$

En tenant compte de tous ces résultats, la relation (6) devient

$$(\log m)_{uv} = 0,$$

d'où

$$m = U\,V,$$

U étant une fonction de u, V une fonction de v.

Digitized by Google

On peut toujours choisir les variables indépendantes, sans changer les courbes du réseau (x), de manière que l'on ait $m = 1$.

Les lignes asymptotiques de (x) et de toutes les surfaces sur lesquelles sont tracés les réseaux de la suite $[x]$ sont

$$u + v = \text{const.}, \quad u - v = \text{const.}$$

On dit dans ce cas que le réseau est *isotherme conjugué.*

On a donc le résultat suivant: *Tout réseau* R *est isotherme-conjugué.*

255. Un exemple simple de réseau R est donné par un réseau (x) de E_3 projectif avec (x_1). Il est évident en effet que toutes les congruences de la suite $[x]$ sont W (voir no. 184).

J'ai démontré que tout réseau de E_3 applicable sur une surface du second ordre est un réseau R. M. *Bianchi* a retrouvé ce résultat.

256. *Réseaux* R *à suite de Laplace périodique.* Nous supposons que $(x_4) = (x)$. D'après ce qui précède et en tenant compte du no. 166 on peut définir un tel réseau par le système

$$x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0, \quad x_{-2} + x_2 = 0.$$

Les relations (4) et (5) donnent

$$h = k_{-1}, \quad k = h_1.$$

Les conditions d'intégrabilité s'obtiennent aisément; elles sont

$$b_{-2} = b, \quad (h\,h_1)_v = 0, \quad k_{-2} = h_1.$$

Or

$$b_{-1} = b - (\log k)_u, \quad b_{-2} = b_{-1} - (\log k_{-1})_u,$$

donc

$$b_{-2} = b - (\log k\,k_{-1})_u.$$

On conclut d'abord de ces relations

$$h\,k = \text{const.}$$

On peut prendre

$$h\,k = 1.$$

Ensuite $h_1 = k$ ou $k_{-1} = h$ donne

$$(\log h)_{uv} = 2\,h - \frac{2}{h}$$

dont l'intégration est nécessaire pour résondre la probléme. En vertu de cette relation et de $h\,k = 1$ toutes les autres conditions du problème sont satisfaites.

Digitized by Google

Remarquons maintenant que, en vertu des relations précédentes, on a

$$b_{-2} = b.$$

Comme on a aussi

$$a_{-2} = a$$

et comme de

$$h_{-2} = k_{-1} = h$$

et

$$k_{-2} = h_1 = k$$

il résulte

$$c_{-2} = c,$$

l'équation de Laplace qui correspond au réseau (x_{-2}) est identique à celle de (x).

Enfin, si l'on pose $\zeta = x_{-2}$, on a

$$\zeta_{-2} + \zeta_2 = 0,$$

par conséquent le réseau $(\zeta) \equiv (x_{-2}) \equiv (x_2)$ vérifie le même système que (x).

Il en résulte que dans la suite $[x]$ le réseau (x_{-2}) est projectif à (x): la suite $[x]$ est donc autoprojective.

IV. SUITES DE LAPLACE AUTODÉRIVÉES.

257. Nous avons considéré au no. 118 les suites dérivées de différents ordres d'une suite de Laplace donnée. Nous nous proposons maintenant de chercher s'il y a des suites qui soient leurs propres dérivées, nous dirons alors qu'elles sont *autodérivées* et nous verrons que parmi ces suites il y a celles que l'on déduit des réseaux R.

Désignons, avec M. *Darboux*, par (m, n) une expression linéaire et homogène par rapport à x, x_{-1}, $x_{-2}, \ldots, x_{-m}$, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, qui s'annule pour $m + n$ solutions linéairement distinctes, $R', R'', \ldots, R^{(m+n)}$ de l'équation de Laplace qui correspond à (x). Alors le point

$$x' = (m, n)$$

décrit un réseau (x'), dérivé du $(m + n)$ — ième ordre de (x).

On peut déterminer les coefficients a', b' de l'équation de Laplace

$$x'_{uv} + a' x'_u + b' x'_v + c' x' = 0$$

qui correspond au réseau (x').

Posons, pour faire le calcul,

$$x' = (m, n) = \alpha x_{-m} + \alpha' x_{-m+1} + \ldots + \beta x_n + \beta' x_{n-1} + \ldots + \gamma x.$$

Digitized by Google

On a alors, en remarquant[1]) que

$$\frac{\delta x_{-p}}{\delta u} = x_{-p-1} - b_{-p}\, x_{-p}, \quad \frac{\delta x_{-p}}{\delta v} = -a\, x_{-p} + k_{-p+1}\, x_{-p+1};$$

$$\frac{\delta x_q}{\delta u} = -b\, x_q + h_{q-1}\, x_{q-1}, \quad \frac{\delta x_q}{\delta v} = x_{q+1} - a_q\, x_q,$$

$$x'_u = a\, x_{-m-1} + (a_u + a' - b_{-m}\, a)\, x_{-m} + \ldots$$
$$+ (\beta_u - b\,\beta)\, x_n + (\beta'_u - b\,\beta' + h_{n-1}\,\beta)\, x_{n-1} + \ldots,$$
$$x'_v = (a_v - a\, a)\, x_{-m} + (a'_v - a\, a' + k_{-m+1}\, a)\, x_{-m+1} + \ldots$$
$$+ \beta\, x_{n+1} + (\beta_v + \beta' - a_u\, \beta)\, x_n + \ldots,$$
$$x'_{uv} = (a_v - a\, a)\, x_{-m-1} + \ldots + (\beta_u - b\,\beta)\, x_{n+1} + \ldots$$

Il résulte de là que l'expression

$$x'_{uv} + \left(a - \frac{a_v}{a}\right) x'_u + \left(b - \frac{\beta_v}{\beta}\right) x'_v$$

est, comme x', linéaire et homogène en x, x_{-1}, $x_{-2}, \ldots, x_{-m}$, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et s'annule pour les mêmes $(m+n)$ solutions $R', R'', \ldots, R^{m+n}$ de $L = o$. Il y a donc un facteur c' tel que l'on ait

$$L' = x'_{uv} + \left(a - \frac{a_v}{a}\right) x'_u + \left(b - \frac{\beta_u}{\beta}\right) x'_v + c'\, x' = o.$$

Supposons maintenant que le réseau (x') soit identique au réseau initial (x). On devra avoir

$$x' = p\, x$$

et l'équation $L' = o$ devra être identique à celle que vérifie px, donc

$$\frac{p_v}{p} = \frac{a_v}{a}, \quad \frac{p_u}{p} = \frac{\beta_u}{\beta}$$

et de là

$$\left(\log \frac{a}{\beta}\right)_{uv} = o, \quad \frac{a}{\beta} = \frac{U}{V}$$

U étant une fonction de u, V une fonction de v. On peut faire un changement de variables, sans changer le réseau, tel que l'on ait $a = \beta$ et sans restreindre la généralité, $a = \beta = 1$. On a donc

$$(1) \quad x' = x_{-m} + a'\, x_{-m+1} + \ldots + x_n + \beta'\, x_{n-1} + \ldots = p\, x, \quad p = \text{const.}$$

et cette équation avec

$$L = o$$

définissent projectivement *le réseau autodérivé* (x).

---

[1]) On suppose que l'équation de Laplace pour (x) est

$$L = x_{uv} + a\, x_u + b\, x_v + c\, x = o.$$

Digitized by Google

258. Il est intéressant de faire voir que le réseau (x_{-1}), par exemple, est, lui aussi, autodérivé et qu'il en est de même de tous les réseaux de la suite de Laplace $[x]$.

En effet, on a de (1)

$$x'_u = p\,(x_{-1} - b\,x)$$

et de là

$$(2)\quad x'_u + b\,p\,x' = p\,x_{-1}$$

où le premier membre est manifestement une expression $(m+1,\ n-1)$, qui exprime précisément que le réseau (x_{-1}) est autodérivé.

259. Le résultat précédent peut être complété. L'équation (2) développée est

$$(3)\quad x_{-m-1} + (a' - b_{-m} + b)\,x_{-m} + \ldots + (\beta'_u + h_{n-1})\,x_{n-1} + \ldots = p\,x_{-1},$$

d'où l'on tire, en dérivant par rapport à v

$$-a\,x_{-m-1} + [k_{-m} + (a' - b_{-m} + b)_v - a\,(a - b_{-m} + b)]\,x_{-m} + \ldots + (\beta'_u + h_{n-1})\,x_n + \ldots = p\,(-a\,x_{-1} + k\,x)$$

et de là, à l'aide de (3)

$$[k_{-m} + (a' - b_{-m} + b)_v]\,x_{-m} + \ldots + (\beta'_u + h_{n-1})\,x_n + \ldots = p\,k\,x$$

qui doit être identique à (1). On a donc

$$k_{-m} + (a' - b_{-m} + b)_v = \beta'_u + h_{n-1} = k$$

et (2) devient alors

$$x_{-m-1} + \ldots + k\,x_{n-1} + \ldots = p\,x_{-1}$$

et en posant $\xi = x_{-1}$

$$\xi_{-m} + \ldots + \xi_n + \ldots = p\,\xi$$

de même forme que (1).

Dans le cas $m = n = 2$ ce résultat analytique a une forme géométrique intéressante. Il prouve que sur les surfaces, sur lesquelles sont tracés les réseaux de la suite $[x]$, située dans un E_3, il y a correspondance des lignes asymptotiques, c'est-à-dire que tous les réseaux de la suite sont des réseaux R.

260. Réciproquement, il s'agit de démontrer que tout réseau R est un réseau autodérivé.

Nous pouvons définir un réseau R par le système

$$(3)\quad \begin{cases} x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0, \\ x_{-2} + x_2 + a\,x_{-1} + \beta\,x_1 + \gamma\,x = 0, \end{cases}$$

où (no. 254)

$$(4)\quad a_v + k_{-1} = h,\quad \beta_u + h_1 = k.$$

Digitized by Google

Les conditions d'intégrabilité du système (3) se réduisent (voir no. 115) au fond à ceci: On tire de (3)

$$(5)\quad (x_{-2} + x_2 + a\,x_{-1} + \beta\,x_1 + \gamma\,x)_u + b\,(x_{-2} + x_2 + a\,x_{-1} + \beta\,x_{-1} + \gamma\,x) = 0$$

qui ne contient pas x_2. On déduit ensuite de (5)

$$(6)\quad \begin{array}{l}(x_{-2} + x_2 + \ldots)_{uv} + a\,(x_{-2} + x_2 + \ldots)_u + b\,(x_{-2} + x_2 + \ldots)_v \\ + (b_v + a\,b)\,(x_{-2} + x_2 + \ldots) = 0\end{array}$$

qui est linéaire et homogène en x_{-2}, x_2, x_{-1} et x_1 et doit par conséquent être identique à la seconde équation du système (3). Or, à l'aide de (4), on voit que le coefficient commun de x_{-2} et x_2 est k; on a donc l'identité

$$(7)\quad \begin{array}{l}x_{-2} + x_2 + \ldots)_{uv} + a\,(x_{-2} + x_2 + \ldots)_u + b\,(x_{-2} + x_2 + \ldots)_v \\ + (b_v + a\,b)\,(x_{-2} + x_2 + \ldots) \equiv k\,(x_{-2} + x_2 + \ldots).\end{array}$$

On a d'autre part, en vertu de la première équation du système (3)

$$(8)\quad x_{uv} + a x_u + b x_v + (b_v + ab)\,x = kx,$$

car

$$k = b_v + ab - c.$$

L'identité (7), qui exprime les conditions d'intégrabilité du système (3), prend, à l'aide de (8), la forme suivante

$$\begin{array}{c}[x_{-2} + x_2 + \ldots + (\gamma + p)\,x]_{uv} + a\,[x_{-2} + x_2 + \ldots + (\gamma + p)\,x]_u \\ + b\,[x_{-2} + x_2 + \ldots + (\gamma + p)\,x]_v + (b_v + ab)\,[x_{-2} + x_2 + \ldots + (\gamma + p)x] \\ \equiv k\,[x_{-2} + x \ldots + (\gamma + p)\,x],\ p = const.\end{array}$$

ce qui prouve que le système

$$\begin{array}{c}R_{uv} + aR_u + bR_v + cR = 0 \\ R_{-2} + R_2 + aR_{-1} + \beta R_1 + (\gamma + p)\,R = 0\end{array}$$

est complètement intégrable et admet par conséquent 4 solutions linéairement indépendantes R′, R″, R‴ et R^{IV}.

D'autre part, la deuxième équation de (3) peut s'écrire

$$x_{-2} + x_2 + a x_{-1} + \beta x_1 + (\gamma + p)\,x = px,$$

dont le premier membre s'annulant manifestement pour $x_i = R', R'', R''', R^{IV}$ est une expression (— 2, 2) de Darboux et on a

$$(9)\quad q \begin{vmatrix} x_{-2} & x_2 & x_{-1} & x_1 & x \\ R'_{-2} & R'_2 & R'_{-1} & R_2 & R \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = px,$$

ce qui démontre que *le réseau* (x), *supposé* R, est *autodérivé* (q étant un facteur convenable).

Digitized by Google

261. On peut aller plus loin et compléter le résultat précédent.

Considérons le point

$$x' = \begin{vmatrix} x_{-1} & x_1 & x \\ R'_{-1} & R'_1 & R' \\ R''_{-1} & R''_1 & R'' \end{vmatrix}$$

qui décrit un réseau (x'), dérivé du second ordre de (x), dont nous désignons l'équation de Laplace par $L' = 0$. Il est évident que cette équation admet

$$\varrho' = \begin{vmatrix} R'''_{-1} & R'''_1 & R''' \\ R'_{-1} & R'_1 & R' \\ R''_{-1} & R''_1 & R'' \end{vmatrix}, \quad \varrho'' = \begin{vmatrix} R^{IV}_{-1} & R^{IV}_1 & R^{IV} \\ R'_{-1} & R'_1 & R' \\ R''_{-1} & R''_1 & R''' \end{vmatrix}$$

comme solutions.

Je dis que l'on a

$$x = \lambda \begin{vmatrix} x'_{-1} & x'_1 & x' \\ \varrho'_{-1} & \varrho'_1 & \varrho' \\ \varrho''_{-1} & \varrho''_1 & \varrho'' \end{vmatrix}$$

λ étant un facteur convenable. En effet, le second membre est linéaire et homogène en x_{-2}, x_2, x_{-1}, x_1, et x et il s'annule pour $x = R'$, R'', R''' et R^{IV}; il est donc proportionnel, en vertu de (9), à x.

Le réseau (x) est, lui aussi, le dérivé de (x'). *Les réseaux* (x) *et* (x') *sont réciproquement dérivés*, chacun est dérivé de l'autre.

Il résulte encore de là que le réseau (x') est, lui aussi, autodérivé, c'est donc un réseau R.

262. Nous allons montrer maintenant qu'il y a correspondance des lignes asymptotiques sur les surfaces (x) et (x'), c'est-à-dire que la droite xx' décrit une congruence W ayant ces surfaces pour surfaces focales.

Il suffit de démontrer que la droite xx' fait correspondre deux réseaux particuliers de ces surfaces, parce qu'alors elle fera correspondre aussi les lignes asymptotiques. Or, elle fait correspondre d'abord les réseaux (x) et (x'), ensuite les réseaux focaux [1]) de la congruence (xx').

On démontrerait de la même manière que les congruences $(x_{-1}\, x'_{-1})$, $(x_1\, x'_1)$, $(x_{-2}\, x'_{-2})$, $(x_2\, x'_2)$, ...
sont, elles aussi, des congruences W.

263. Il n'est pas dépourvu d'intérêt de voir les images dans l'espace E_5 des deux suites $[x]$ et $[x']$ du réseau R que nous venons de considérer.

On aura sur la variété quadratique Q_4 deux successions de réseaux à invariants égaux (no. 251), déduits l'un de l'autre par une transformation de Darboux (no. 106 et suiv.). Nous laissons au lecteur d'établir ce point.

[1]) Dans notre espace, une droite tangente à deux surfaces admet deux réseaux focaux.

Digitized by Google

CHAPITRE XIV.

SUR CERTAINS COUPLES DE SURFACES.

I. PROBLÈME DE M. GUICHARD.

262. M. *Guichard* a étudié (C. R., 10 mars, 1913) le problème suivant: *Trouver les équations de la forme*

$$(1) \quad x_{uv} = hx$$

admettant six solutions $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ *liées par les relations*

$$(2) \quad \Sigma x^2 = 1, \ \Sigma x_u{}^2 = 0, \ \Sigma x_v{}^2 = 0, \ \Sigma x_{uu}{}^2 = 0, \ \Sigma x_{vv}{}^2 = 0.$$

Ce problème est une première généralisation d'un problème analytique rencontré par M. *Darboux* dans l'étude des surfaces minima noneuclidiennes (Leçons sur la théorie générale des surfaces, Tome III, p. 472). La généralisation complète a été donnée par l'auteur immédiatement après M. *Guichard* (C. R., 14 avril, 1913).

Nous nous bornerons ici au problème de M. Guichard, en le complétant sous plusieurs points, et en renvoyant le lecteur, pour le problème général, à une Note de l'auteur (Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine, V-ème année, (1916—17, p. 17 et suiv.).

Nous donnerons aussi une interprétation géométrique de ce problème.

263. Je dis tout d'abord que si l'équation

$$(3) \quad x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0$$

admet six solutions $x^{(i)}$ vérifiant les relations (2), on a nécessairement $a = b = 0$.

Supposons en effet $a \neq 0$, par exemple, et montrons que dans ce cas les six solutions ne sont plus linéairement indépendantes.

On tire, dans ce but, de (2) les relations

$$\Sigma x_u \, x_{uu} = 0, \ \Sigma x_u \, x_{uuu} = 0, \ \Sigma x_{uu} \, x_{uuu} = 0$$

et

$$\Sigma x_v \, x_{vv} = 0, \ \Sigma x_v \, x_{vvv} = 0, \ \Sigma x_{vv} \, x_{vvv} = 0.$$

Ensuite, on a de (3), à cause de $a \neq 0$

$$\Sigma x_u \, x_v = 0$$

et de là

$$\Sigma x_u \, x_{vv} = 0, \ \Sigma x_u \, x_{vvv} = 0, \ \Sigma x_{uu} \, x_{vv} = 0, \ \Sigma x_{uu} \, x_{vvv} = 0,$$
$$\Sigma x_v \, x_{uu} = 0, \ \Sigma x_v \, x_{uuu} = 0, \ \Sigma x_{vv} \, x_{uuu} = 0, \ \Sigma x_{uuu} \, x_{vvv} = 0.$$

Digitized by Google

On a évidemment aussi

$$\Sigma x\, x_u = 0,\ \Sigma x\, x_{uu} = 0,\ \Sigma x\, x_{uuu} = 0$$
$$\Sigma x\, x_v = 0,\ \Sigma x\, x_{vv} = 0,\ \Sigma x\, x_{vvv} = 0,$$

Tirons de toutes ces relations les 6 suivantes

$$\Sigma x\, x_{uuu} = 0,\ \Sigma x_u\, x_{uuu} = 0,\ \Sigma x_v\, x_{uuu} = 0,\ \Sigma x_{uu}\, x_{uuu} = 0,\ \Sigma x_{vv}\, x_{uuu} = 0,$$

et

$$\Sigma x_{vvv}\, x_{uuu} = 0,$$

Elles prouvent que les $x^{(i)}$ $(i = 1, 2,.., 6)$ satisjont à une équation de la forme

$$x_{vvv} = \alpha x_{uu} + \beta x_{vv} + \alpha_1 x_u + \beta_1 x_v + \gamma x$$

ou une autre équation d'ordre inférieur.

On démontrerait de la même manière que l'on a

$$x_{uuu} = \alpha' x_{uu} + \beta' x_{vv} + \alpha'_1\, x_u + \beta'_1\, x_v + \gamma' x.$$

On aurait donc un système pour les $x^{(i)}$ qui ne peut admettre plus de 5 solutions linéairement indépendantes, ce qui est contre l'hypothèse.

On a donc $a = 0$ et aussi $b = 0$. Cette proposition, que nous venons de démontrer pour le cas de 6 solutions a été donnée, pour le cas de 4 solutions, entre lesquelles, on a au lieu de (2), les relations

$$\Sigma x^2 = 1,\ \Sigma x_u{}^2 = 0,\ \Sigma x_v{}^2 = 0,$$

par M. *Darboux* (ibidem, p. 473).

264. Nous pouvons revenir au problème de M. Guichard sous sa forme initiale et nous considérerons le réseau à invariants égaux (x), décrit par le point x de coordonnées projectives $x^{(i)}$ $(i = 1, 2,..., 6)$.

On peut alors remplacer les relations (2) par les suivantes

$$(4)\quad \Sigma x^2 = 1.\ \Sigma x_{-1}{}^2 = 0,\ \Sigma x_1{}^2 = 0,\ \Sigma x_{-2}{}^2 = 0,\ \Sigma x_2{}^2 = 0,$$

d'où il résulte que les réseaux (x_{-1}), (x_1), (x_{-2}) et (x_2) et par conséquent les congruences $(x_{-1}\, x_{-2})$, $(x_1\, x_2)$ de E_5 sont quadratiques.

Il y a plus. On peut démontrer aisément que la suite de Laplace $[x]$ est périodique. On a en effet

$$\Sigma x x_3 = 0,\ \Sigma x_{-1}\, x_3 = 0,\ \Sigma x_1\, x_3 = 0,\ \Sigma x_{-2}\, x_3 = 0,\ \Sigma x_2\, x_3 = 0$$

et

$$\Sigma x\, x_{-3} = 0,\ \Sigma x_{-1}\, x_{-3} = 0,\ \Sigma x_1\, x_{-3} = 0,\ \Sigma x_{-2}\, x_{-3} = 0,\ \Sigma x_2 x_{-3} = 0,$$

Digitized by Google

et comme x, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2 sont linéairement indépendants, on a

$$x_{-3} = m\,x_3,$$

c'est-à-dire que les points x_{-3} et x_3 sont confondus. Le réseau (x) se reproduit après 6 transformations de Laplace.

On a donc le résultat suivant: *Toute solution du problème de Guichard conduit à un réseau à invariants égaux de* E_5 *dont la suite est périodique.*

La théorie générale développée au no. 173 prouve que la réciproque de la proposition précédente est vraie.

II. UNE CLASSE SPÉCIALE DE SURFACES.

265. Nous allons montrer maintenant qu'à toute suite de Laplace périodique déduite d'un réseau à invariants égaux identique à son sixième transformé de Laplace, $(x_6) \equiv (x)$, on peut faire correspondre deux surfaces S et S′ de notre espace projectif E_3, dont les surfaces réglées asymptotiques (no. 238) ont les lignes flecnodales confondues (no. 40 et 41) et qui ont, l'une par rapport à l'autre, une situation particulière et réciproque.

Soit (x) le réseau considéré, lequel, comme nous le savons (no. 166), est contenu dans un espace projectif E_5 à cinq dimensions.

Ce réseau peut être défini par le système

$$x_{uv} = h\,x, \quad x_6 = x$$

avec la relation

$$h h_1 h_2 = 1$$

entre les invariants successifs (voir no. 174).

Nous avons établi (no. 173) que parmi les réseaux de la suite $[x]$, tous sont quadratiques, sauf (x) et (x_3), ce dernier réseau étant, comme le réseau initial (x), à invariants égaux. On a donc

$$h_3 = k_3 = h_2 = \frac{1}{h h_1}.$$

Comme d'autre part

$$a_3 = a - (\log h h_1 h_2)_v = 0, \quad b_3 = b = 0,$$

x_3 satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h h_1} x_3.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = h_2 x_2 = \frac{1}{h h_1} x_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v} = x_1,$$

dont nous aurons besoin plus loin.

Ajoutons maintenant les relations qui expriment (no. 169) que notre suite $[x]$ est autopolaire. On a (no. 173)

$$\Sigma x_i x_k = 0, \text{ pour } i + k \neq 6, \quad i, k = 1, 2, \ldots, 6$$
$$\Sigma x_i x_{6-i} = (-1)^i \qquad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Digitized by Google

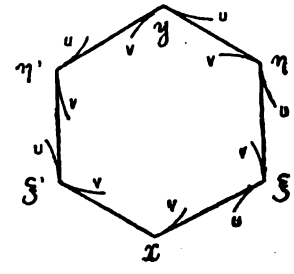
On a en particulier

$$\Sigma x^2 = 1, \quad \Sigma x^2_3 = -1$$

266. Pour l'interprétation géométrique des relations précédentes il convient de changer les notations et de poser

$$\xi = x_1, \ \eta = x_2, \ y = x_3, \ \eta' = x_4, \ \xi' = x_5.$$

On aura alors la figure suivante



et de plus les relations

$$(I) \quad \begin{cases} \Sigma x^2 = 1, \Sigma y^2 = -1, \ \Sigma\xi\xi' = -1, \ \Sigma\eta\eta' = 1, \\ \Sigma xy = \Sigma x\xi = \Sigma x\xi' = \Sigma x\eta = \Sigma x\eta' = 0, \\ \Sigma y\xi = \Sigma y\xi' = \Sigma y\eta = \Sigma y\eta' = 0, \\ \Sigma\xi^2 = \Sigma\eta^2 = \Sigma\xi'^2 = \Sigma\eta'^2 = 0, \\ \Sigma\xi\eta = \Sigma\xi\eta' = \Sigma\xi'\eta = \Sigma\xi'\eta' = 0 \end{cases}$$

qui nous conduiront au couple de surfaces S et S'.

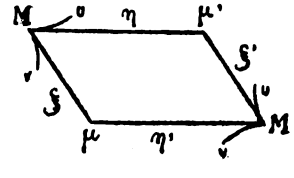
On voit en effet que $(\xi\eta)$ et $(\xi'\eta')$ sont des congruences quadratiques: ce sont les images de deux surfaces S et S' de E_3, rapportées aux lignes asymptotiques, ξ étant l'image de la tangente en un point M de S à la ligne asymptotique $u = \text{const.}$, η celle de la tangente à $v = \text{const.}$, ξ' et η' étant les images de tangentes au point M' de S' aux lignes asymptotiques $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$

Les relations

$$\Sigma\xi\eta' = 0, \quad \Sigma\xi'\eta = 0$$

prouvent que *les tangentes* [1]) ξ *et* η' *d'un côté,* ξ' *et* η *de l'autre se coupent.*

On a donc pour les surfaces S et S' la figure suivante



les courbes tracées étant des lignes asymptotiques.

---

[1]) Pour abréger nous avons désigné les tangentes par leurs images.

Digitized by Google

267. Prenons la tangente ξ en M à la ligne asymptotique $u = \text{const.}$ de S.

Si la variable v varie seule, ξ décrit évidemment une développable, admettant l'asymptotique pour arête de rebroussement; si c'est u qui varie et que v reste constant, ξ décrit une surface réglée R_v, une des surfaces réglées asymptotiques attachées à S (no. 238), l'autre, R_u, étant décrite par η lorsque $u = \text{const.}$

Considérons trois génératrices infiniment voisines de R_v; elles appartiennent à une demiquadrique (série linéaire), qui à la limite devient la demiquadrique Q_v, osculatrice à R_v le long de ξ (no. 40). L'image de Q_v dans E_5 est l'intersection de l'espace quadratique Q_4 par le plan $\xi x\, \xi'$, osculateur en ξ à la courbe $v = \text{const.}$ décrite par ce point.

Si nous prenons maintenant la demiquadrique Q_u, osculatrice à R_u le long de η, on aura pour image l'intersection de Q_4 par le plan $\eta\, y\, \eta'$, osculateur en η à la courbe $u = \text{const.}$ décrite par ce point.

Les relations (I) prouvent facilement que les plans $\xi x \xi'$ et $\eta\, y\, \eta'$ sont conjugués par rapport à Q_4, les demiquadriques Q_u^1 et Q_v appartiennent alors (no. 21) à une même quadrique Q, que l'on appelle *la quadrique de Lie attachée à* S *en* M.

Si nous passons à S' et que l'on applique les mêmes considérations, on obtient le résultat suivant:

Les surfaces S *et* S' *ont, aux points correspondants, la même quadrique de Lie.*

268. Considérons actuellement la génératrice ξ de R_v et trois autre génératrices infiniment voisines de la même surface. Elles définissent une congruence linéaire dont l'image est, à la limite, l'intersection de Q_4 par le L_3 — osculateur à la courbe décrite par ξ pour $v = \text{const.}$ Ce L_3—osculateur est déterminé par les points ξ, x, ξ' et η'.

Les deux droites qui coupent toutes les droites de la congruence — les tangentes flecnodales de R_v le long de ξ — ont pour image l'intersection de Q_4 par la conjuguée du L_1 précédent. Or, les relations (I) prouvent que cette droite conjuguée est $y\eta'$, car on a

$$\Sigma y\xi = 0, \quad \Sigma yx = 0, \quad \Sigma y\xi' = 0, \quad \Sigma y\eta' = 0,$$
$$\Sigma \eta'\xi = 0, \quad \Sigma \eta' x = 0, \quad \Sigma \eta'\, \xi' = 0, \quad \Sigma \eta'^2 = 0.$$

Comme on a d'autre part

$$0 = \Sigma (\eta' + \lambda y)^2 = \Sigma \eta'^2 + 2\lambda \Sigma \eta' y + \lambda^2 \Sigma y^2 = -\lambda^2,$$

on voit que *les deux tangentes flecnodales de* R_v *le long de* ξ *sont confondues avec la tangente* η' *de* S'.

On trouverait de la même manière que *les deux tangentes flecnodales de* R_u *le long de* η *sont confondues avec la tangente* ξ' *de* S'.

On verrait enfin aussi que *les tangentes flecnodales de* R'_v *et de* R'_u *le long de* η' *et de* ξ' *respectivement sont confondues avec les tangentes* ξ *et* η *de* S.

On constate ainsi la réciprocité parfaite entre les deux surfaces S et S'.

Digitized by Google

Notre suite périodique et autopolaire de E_5 nous a conduit à un couple remarquable de surfaces de E_3, dont les surfaces réglées asymptotiques ont leurs lignes flecnodales confondues.

269. Revenons à la figure du no. 266 et considérons la droite xy qui coupe l'espace quadratique Q_4 aux points $x + y$, $x - y$: ce sont les images de deux droites de E_3.

Comme on a, en vertu de (I)

$$\Sigma(x \pm y)\,\xi = 0,\quad \Sigma(x \pm y)\eta = 0,\quad \Sigma(x \pm y)\,\xi' = 0,\quad \Sigma(x \pm y)\,\eta' = 0,$$

ces droites rencontrent en même temps les tangentes ξ et η en M à S et les tangentes ξ' et η' en M′ à S′: ce sont donc la droite MM′ et l'intersection des plans tangents en M et en M′ aux surfaces S et S′.

Nous pouvons démontrer que *les développables des congruences formées par chacune de ces droites correspondent aux lignes asymptotiques* $v = \text{const.}$ *et* $u = \text{const.}$ *de* S *et de* S′. Il suffira de vérifier que l'on a

$$\Sigma(x_u \pm y_u)^2 = 0,\quad \Sigma(x_v \pm y_v)^2 = 0.$$

Or

$$x_u = \frac{\delta x_6}{\delta u} = h_5 x_5 = h x_5 = h\xi',\ x_v = x_1 = \xi$$

$$y_u = \frac{\delta x_3}{\delta u} = \frac{1}{hh_1} x_2 = \frac{1}{hh_1}\eta,\ y_v = \frac{\delta x_5}{\delta v} = x_4 = \eta' :$$

il faudra donc vérifier que l'on a

$$\Sigma(h\xi' \pm \frac{1}{hh_1}\eta)^2 = 0,\quad \Sigma(\xi \pm \eta')^2 = 0,$$

ce qui est aisé à l'aide de (I).

270. Il y a cependant un cas particulièrement remarquable qui mérite d'être étudié.

Si l'on a les relations

$$\Sigma(x_u \pm y_u)\,(x_v \pm y_v) = 0,$$

alors les développables des congruences formées par les droites $x \pm y$ sont indéterminées, car on a

$$\Sigma(dx \pm dy)^2 \equiv 0$$

quels que soient du et dv.

Or, pour qu'il en soit ainsi il faut avoir

$$0 = \Sigma(h\xi' \pm \frac{1}{hh_1}\eta)(\xi \pm \eta') = \cdots h \pm \frac{1}{hh_1}$$

ou bien

$$h_1 = \frac{1}{h_2}$$

Digitized by Google

et comme

$$h_1 = h - (\log h)_{uv},$$

l'invariant h doit vérifier l'équation

$$(\log h)_{uv} = h - \frac{1}{h^2}$$

que nous avons déjà rencontrée dans l'étude des surfaces pour lesquelles on a (no. 242)

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

L'indétermination des développables d'une congruence ne peut se produire que dans deux cas: ou les droites de la congruence passent par un point fixe, ou bien elles sont situées dans un même plan.

Soit en effet z la droite dépendant de deux paramètres u et v. Par hypothèse on a

$$\Sigma z^2 = 0, \quad \Sigma z_u^2 = 0, \quad \Sigma z_u z_v = 0, \quad \Sigma z_v^2 = 0$$

on encore, en supposant u et v des fonctions arbitraires de t

$$\Sigma z'^2 = \Sigma (z_u u' + z_v v')^2 \equiv 0.$$

Je dis que l'on a aussi

$$\Sigma z''^2 \equiv 0$$

ou

$$\Sigma (z_{uu} u'^2 + 2 z_{uv} u' v' + z_{vv} v'^2 + z_u u'' + 2 v'')^2 = 0.$$

Or, de

$$\Sigma zz = 0, \ \Sigma z z_u = 0, \ \Sigma z z_v = 0, \ \Sigma z z_{uu} = 0, \ \Sigma z z_{vv} = 0, \ \Sigma z z_{uuu} = 0,$$

on tire que z_{uuu} s'exprime linéairement en z, z_u, z_v, z_{uu} et z_{vv} et qu'il en est de même de $z_{vvv} = 0$.

Il est alors facile de prouver que l'on a

$$\Sigma z_{uu}^2 = 0, \ \Sigma z_{vv}^2 = 0, \ \ldots.$$

et toutes celles qui sont nécessaires pour voir que

$$\Sigma z''^2 \equiv 0$$

donc, selon le no. 39, toutes les surfaces réglées de la congruence sont des cônes ou des tangentes de courbes planes.

Notre analyse fait voir que *les droites* MM', *qui joignent les points correspondants* M *et* M' *des surfaces* S *et* S', *passent, dans le cas actuel, par un point fixe* O, *tandisque la droite, commune aux plans tangents en* M *et en* M' *à* S *et à* S', *reste dans un plan fixe* P.

Digitized by Google

271. Pour nous rendre compte de la situation réciproque des surfaces S et S', remarquons que les génératrices ξ et η' des surfaces réglées asymptotiques R_v et R'_v, attachées à S et à S', se coupent en un point μ (voir no. 266) et que de même les génératrices ξ' et η de R_u et R'_u se coupent en un autre point μ'.

Comme η' est tangente flecnodale de R_v et ξ tangente flecnodale de R'_v, les deux surfaces R_v et R'_v ont en μ le même plan tangent:

Les surfaces R_v *et* R'_v *sont circonscrites, l'une à l'autre, le long de leur ligne flecnodale commune, qui est la courbe décrite par* μ *lorsque* $v = \text{const.}$ *et que* u *varie seule.* On a une propriété analogue pour R_u et R'_u.

Ceci a lieu en général. Dans notre cas particulier la droite $\mu\mu'$ reste contenue dans le plan P, tandisque la droite MM' passe par le point fixe. Le plan tangent commun en μ à R_v et R'_v étant $M\mu M'$, passe par le point fixe O et il en est de même du plan tangent en μ' à R_u et R'_u.

On peut donc énoncer le résultat suivant:

Les surfaces S *et* S' *de chaque couple jouissent, dans ce cas particulier, de la propriété que leurs surfaces réglées asymptotiques* R_v *et* R'_v *d'un côté,* R_u *et* R'_u *de l'autre, ont toutes leurs lignes flecnodales confondues planes, situées toutes dans un même plan fixe* P, *le long desquelles elles sont circonscrites l'une à l'autre* (R'_u *à* R_u, R'_v *à* R_v). *Les développables circonscrites à ces surfaces réglées le long de ces courbes planes communes sont des cônes ayant tous le même sommet* O.

272. Supposons le plan P rejeté à l'infini. Les surfaces R_u et R_v attachées à S ont d'abord leurs lignes flecnodales confondues à l'infini, tandisque les développables circonscrites le long de ces courbes — *les développables asymptotiques* de R_u et de R_v — sont des cônes ayant le même sommet O.

La surface S, et par suite S' aussi, jouit (no. 238) de la propriété

$$\frac{K}{d^4} = \text{const.}$$

273. Nous sommes partis d'un réseau périodique et à invariants égaux de E_5 et nous avons été conduits à un couple remarquable de surfaces S et S'.

Il s'agit maintenant de démontrer que réciproquement toute surface S, dont les surfaces réglées asymptotiques R_u et R_v ont leurs lignes flecnodales confondues, dérive d'une suite périodique et autopolaire de E_5.

Soient ξ et η les images des tangentes en M à la surface S aux lignes asymptotiques $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ Nous savons (no. 245) que les points ξ et η décrivent dans E_5 les réseaux focaux de la congruence quadratique $(\xi\eta)$.

Soient de plus (ξ_{-1}), (ξ_{-2}), ..., les transformés successifs de Laplace de (ξ) dans le sens des courbes u, (η_1), (η_2), ..., les transformés de (η) dans le sens des courbes v. Evidemment (η) est le transformé de (ξ) dans le sens des courbes v.

Nous allons faire voir que *les réseaux* (ξ_{-3}) *et* (η_2) *sont identiques, ce qui prouvera que la suite* $[\xi] \equiv [\eta]$ *est périodique.*

Digitized by Google

Nous établirons tout d'abord que la suite $[\xi]$ est autopolaire par rapport à l'espace quadratique Q_4.

On a, par hypothèse,

$$\Sigma\xi^2 = 0, \quad \Sigma\eta^2 = 0, \quad \Sigma\xi\eta = 0,$$

d'où

$$\Sigma\eta\eta_v = 0$$

et, comme η_v est linéaire en η et η_1, on a

$$\Sigma\eta\eta_1 = 0.$$

De même

$$\Sigma\xi\eta_u + \Sigma\eta\xi_u = 0$$

et, comme $\Sigma\xi\eta_u = 0$, car η_u est linéaire en ξ et η, il reste

$$\Sigma\eta\xi_u = 0$$

ou encore

$$\Sigma\eta\xi_{-1} = 0.$$

De celle-ci on tire

$$\Sigma\eta_u\,\xi_{-1} + \Sigma\eta\,\frac{\delta\xi_{-1}}{\delta u} = 0$$

et, comme $\Sigma\eta_u\xi_{-1} = 0$, on a

$$\Sigma\eta\,\frac{\delta\xi_{-1}}{\delta u} = 0$$

ou

$$\Sigma\eta\xi_{-2} = 0.$$

Finalement, on a les relations

$$\Sigma\eta^2 = 0,\ \Sigma\eta\xi = 0,\ \Sigma\eta\xi_{-1} = 0,\ \Sigma\eta\xi_{-2} = 0,\ \Sigma\eta\eta_1 = 0$$

qui prouvent que η est le pôle, par rapport à Q_4, de l'espace linéaire à quatre dimensions L_4 déterminé par les points linéairement indépendants η, ξ, ξ_{-1}, ξ_{-2}, η_1.

La suite $[\eta]$ est donc (no. 123) la polaire réciproque de $[\xi] \equiv [\eta]$ par rapport à l'espace quadratique Q_4.

La suite $[\xi]$ *est* par conséquent *autopolaire.*

Il résulte de là (voir no. 123) que η_1 est le pôle du L_4 déterminé par les points η, ξ, ξ_{-1}, ξ_{-2} et ξ_{-3}; η_2 le pôle du L_4 déterminé par les points ξ, ξ_{-1}, ξ_{-2}, ξ_{-3} et ξ_{-4} et ainsi de suite. [1])

274. Nous sommes préparés pour démontrer que la suite $[\xi]$ est périodique, d'une manière plus précise que les réseaux (ξ_{-3}) et (η_2) sont identiques.

---

[1]) Dans l'autre sens ξ est le pôle du L_4 déterminé par ξ_{-1}, ξ, η, η_1, η_2; ξ_{-1} de celui déterminé par ξ, η, η_1, η_2, η_3; ξ_{-2}, de celui déterminé par η, η_1, η_2, η_3 et η_4; ξ_{-3} de celui qui est déterminé par η_1, η_2, η_3, η_4, η_5 etc.

Digitized by Google

Par hypothèse la surface réglée R_v de S, décrite par ξ pour $v = \text{const.}$, a ses lignes flecnodales confondues. Alors (no. 41) le complexe linéaire osculateur à R_v le long de ξ est spécial.

Or, ce complexe linéaire ayant pour image l'intersection de Q_4 par le L_4 déterminé par les points ξ, ξ_{-1}, ξ_{-2}, ξ_{-3} et ξ_{-4}, ou comme deuxième image le pôle de ce L_4, à savoir (no. 273) le point η_2, on a, le complexe étant spécial

$$\Sigma \eta_2^2 = 0.$$

De même, l'hypothèse, que les surfaces réglées asymptotiques R_u ont, elles aussi, leurs lignes flecnodales confondues, conduit à la relation

$$\Sigma \xi_{-2}^2 = 0.$$

Cette relation donne par dérivation

$$\Sigma \xi_{-3} \xi_{-2} = 0, \quad \Sigma \xi_{-1} \xi_{-2} = 0$$

et de la dernière on tire

$$\Sigma \xi_{-3} \xi_{-1} = 0$$

et de là

$$\Sigma \xi_{-3} \xi = 0.$$

Ajoutons à toutes ces relations les deux suivantes

$$\Sigma \xi_{-3} \eta_1 = 0, \quad \Sigma \xi_{-3} \eta_2 = 0$$

qui résultent du fait que ξ_{-3} est le pôle du L_3 déterminé par η_1, η_2, η_3, η_4 et η_5.

Cela étant, comme la suite $[\xi]$ est contenue dans un E_5 sans être contenue dans un espace linéaire à moins de 5 dimensions, on peut poser

$$(1) \quad \xi_{-3} = a\,\xi + a'\,\xi_{-1} + a''\,\xi_{-2} + b\,\eta + b'\,\eta_1 + b''\,\eta_2,$$

où les coefficients a, a', a'', b b' b'' sont des fonctions de u et v.

Il s'agit de faire voir que l'on a

$$a = a' = a'' = b = b' = 0,$$

pour que la proposition que nous avons annoncée soit démontrée.

A cet effet nous tirons de (1)

$$0 = \Sigma \xi_{-3} \xi_{-2} = a \Sigma \xi \xi_{-2}.$$

Or, on a nécessairement

$$\Sigma \xi \xi_{-2} \neq 0,$$

autrement, les relations

$\Sigma \xi_{-2} \xi = 0$, $\Sigma \xi_{-2} \eta = 0$, $\Sigma \xi_{-2} \eta_1 = 0$, $\Sigma \xi_{-2} \eta_2 = 0$, $\Sigma \xi_{-2} \eta_3 = 0$, $\Sigma \xi_{-2} \eta_4 = 0$

(voir la note de la fin du no. 273) prouveraient que les points ξ, η, η_1, η_2, η_3 et η_4

Digitized by Google

dépendent linéairement et que par conséquent $[\xi]$ serait contenue dans un espace linéaire à moins de 5 dimensions.

On a donc

$$a = 0.$$

De la même manière, on tire de (1)

$$0 = \Sigma\, \xi_{-3}\, \xi_{-1} = a' \Sigma\, \xi_{-1}^{2}.$$

Or on a ici aussi

$$\Sigma\, \xi_{-1}^{2} \neq 0,$$

autrement on aurait

$$\Sigma\, \xi_{-1}^{2} = 0,\ \Sigma\, \xi_{-1}\, \xi = 0,\ \Sigma\, \xi_{-1}\, \eta = 0,\ \Sigma\, \xi_{-1}\, \eta_1 = 0,\ \Sigma\, \xi_{-1}\, \eta_2 = 0\ \Sigma\, \xi_{-1}\, \eta_3 = 0$$

et les ξ_{-1}, ξ, η, η_1, η_2 et η_3 ne seraient plus linéairement indépendants, donc

$$a' = 0$$

et ainsi de suite

$$b' = b = a'' = 0.$$

Il reste donc

$$\xi_{-3} = b''\, \eta_{-2}$$

qui prouve bien que la suite $[\xi] \equiv [\eta]$ est périodique et qu'elle a six termes.

Comme elle est en même temps autopolaire, il y a (no. 169 et 173) parmi les réseaux de la suite deux qui sont à invariants égaux.

Nous nous trouvons bien dans les conditions du no. 265 qui nous a conduit au couple remarquable de surfaces S et S'.

III. SUR LES COUPLES DE SURFACES APPLICABLES.

275. On peut considérer un couple de surfaces aplicables comme une entité géométrique à deux points de vue différents: comme une variété à deux dimensions et à élément linéaire nul d'un espace euclidien à six dimensions, ou comme une variété, toujours à deux dimensions, tracée sur une variété quadratique à six dimensions.

Le premier point de vue a le caractère métrique, le second projectif.

Je supposerai que les surfaces appliquables S et S' de notre espace à trois dimensions admettent un réseau conjugué commun, ce qui est le cas général, et je prendrai comme courbes coordonnées sur ces surfaces les courbes de ce réseau.

Soient

$$(1) \quad \theta_{uv} + a\, \theta_u + b\, \theta_v = 0$$

l'équation vérifiée par les coordonnées x, y, z d'un point de S,

$$\theta'_{uv} + a'\, \theta'_u + b'\, \theta'_v = 0$$

celle qui est vérifiée par les coordonnées d'un point mobile sur S'.

Digitized by Google

L'applicabilité des surfaces S et S′ est exprimée par les relations

$$(2)\quad \mathrm{S}\,x_u^2 = \mathrm{S}\,x'^2_u,\ \mathrm{S}\,x_u x_v = \mathrm{S}\,x'_u x'_v,\ \mathrm{S}\,x_v^2 = \mathrm{S}\,x'^2_v,$$

où nous avons employé le signe de sommation de Lamé. On tire de la première

$$\mathrm{S}\,x_u x_{uv} = \mathrm{S}\,x'_u x'_{uv}$$

ou

$$a\,\mathrm{S}\,x_u^2 + b\,\mathrm{S}\,x_u x_v = a'\,\mathrm{S}\,x'^2_u + b'\,\mathrm{S}\,x'_u x'_v$$

et en vertu de (2)

$$(a' - a)\,\mathrm{S}\,x_u^2 + (b' - b)\,\mathrm{S}\,x_u x = 0$$

et de la même manière

$$(a' - a)\,\mathrm{S}\,x_u x_v + (b' - b)\,\mathrm{S}\,x_v^2 = 0.$$

Or

$$\begin{vmatrix} \mathrm{S}\,x_u^2 & \mathrm{S}\,x_u x_v \\ \mathrm{S}\,x_u x_v & \mathrm{S}\,x_v^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

pour toute surface qui n'est pas une développable isotrope, donc

$$a' = a,\ b' = b,$$

c'est-à-dire x, y, z, x', y' et z' satisfont à la même équation (1), que vérifie d'ailleurs, en vertu de

$$\mathrm{S}\,x_u x_v - \mathrm{S}\,x'_u x'_v = 0$$

la fonction $x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$.

Si l'on pose

$$x^{(1)} = x,\quad x^{(2)} = y,\quad x^{(3)} = z,\quad x^{(4)} = i\,x',\quad x^{(5)} = i\,y',\quad x^{(6)} = i\,z',$$

on obtient un réseau d'un espace enclidien à 6 dimensions, pour lequel on a

$$\Sigma\,x_u^2 = \Sigma\,x_u x_v = \Sigma\,x_v^2 = 0$$

ou

$$d\,s^2 = \Sigma\,d\,x^2 \equiv 0;$$

c'est donc un réseau nul.

276. Considérons maintenant à côté des solutions $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$) de (1), la solution

$$x^{(7)} = x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \sum_1^6 x^2$$

et la solution évidente $x^{(8)} = 1$, on a entre ces 8 solutions la relation homogène

$$\sum_1^6 x^2 = x^{(7)}\,x^{(8)}.$$

On obtient ainsi, comme image du couple de surfaces applicables S et S′, un réseau quadratique d'un espace projectif E_7 à sept dimensions.

Digitized by Google

Ce qu'il y a d'intéressant c'est que l'on a aussi la relation

$$\sum_1^6 dx^2 = dx^{(7)}\, dx^{(8)}$$

qui prouve que toutes les tangentes du réseau appartiennent au même espace quadratique Q_6.

La réciproque est vraie et il est aisé de la démontrer. *On peut déduire de tout réseau quadratique de* E_7, *dont les plans tangents appartiennent entièrement à un espace quadratique* Q_6, *un couple de surfaces applicables.*

Nous avons ramené ainsi l'étude des couples de surfaces applicables à cette classe de réseaux quadratiques de E_7, dont les plans tangents sont situés dans le même espace quadratique que le réseau lui-même.

277. Appliquons maintenant à un tel réseau (x) de E_7, pour lequel on a

$$\sum_1^8 x^2 = 0$$

et

$$\sum_1^8 dx^2 \equiv 0$$

ou

$$\Sigma x_u^2 = 0,\ \Sigma x_u x_v = 0,\ \Sigma x_v^2 = 0,$$

une transformation de *Ribaucour*. Je dis que le réseau transformé (x') est de même nature.

On a en effet (no. 96)

$$x' = y + \lambda x$$

λ étant déterminé par

$$Y + \lambda X = 0,\ Y = \Sigma y^2,\ X = 2\,\Sigma xy$$

où

$$y_u = R_{-1}\, x,\quad y_v = R x_1,$$

R étant une solution de l'équation adjointe à celle que vérifie x. On a alors

$$\Sigma x'^2 = 0$$

et comme

$$x'_u = y_u + \lambda x_u + \lambda_u x = (\lambda_u + R_{-1})\, x + \lambda x_u$$
$$x'_v = y_v + \lambda x_v + \lambda_v x = (R + \lambda)\, x_v + (\lambda_v + aR)\, x,$$

on obtient

$$\Sigma x'^2_u = 0,\ \Sigma x'_u x'_v = 0,\ \Sigma x'^2_v = 0,$$

qui montre que le réseau transformé (x') jouit de la même propriété que le réseau initial (x).

On a obtenu ainsi une transformation des couples de surfaces applicables.

On voit, sur cet exemple, comme sur tant d'autres, l'importance du théorème de Ribaucour.

Digitized by Google

278. Nous allons retrouver la transformation précédente, en étudiant cette fois-ci les réseaux nuls d'un espace euclidien E_6 à six dimensions.

Soient $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ les coordonnées cartésiennes d'un point x de ce réseau.

On a alors

$$\sum_1^6 x_u^2 = 0, \quad \Sigma x_u x_v = 0, \quad \Sigma x_v^2 = 0.$$

Posons

$$(3) \quad x_u = k\xi, \quad x_v = k'\eta,$$

on a

$$(4) \quad \Sigma\xi^2 = 0, \quad \Sigma\xi\eta = 0, \quad \Sigma\eta^2 = 0$$

et on peut choisir k et k', de manière que l'on ait

$$(5) \quad \xi_v = b'\eta, \quad \eta_u = c\xi.$$

Prenons encore 4 systèmes de quantités X_i, Y_i, Z_i et T_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ telles que l'on ait les relations

$$(I) \begin{cases} \Sigma X^2 = \Sigma X\xi = \Sigma X\eta = \Sigma Y^2 = \Sigma Y\xi = \Sigma Y\eta = 0, \quad \Sigma XY = 1; \\ \Sigma Z\eta = \Sigma ZX = \Sigma ZY = \Sigma Z^2 = 0, \quad \Sigma Z\xi = 1; \\ \Sigma T\xi = \Sigma TX = \Sigma TY = \Sigma TZ = \Sigma T^2 = 0, \quad \Sigma T\eta = 1 \end{cases}$$

Ces systèmes de quantités sont linéairement indépendants, car on a

$$| \xi\eta XYZT |^2 = -1 \neq 0,$$

l'expression entre barres désignant un déterminant.

Ces quantités ont d'ailleurs une interprétation géométrique simple. On peut les considérer comme les coordonnées kleinéennes de six droites, formant, en vertu de (I) un tétraèdre.

Ajoutons encore la remarque digne d'intérêt que d'après (5) la droite $\xi\eta$ décrit dans l'espace projectif E_5 une congruence quadratique, qui est l'image d'une surface Σ rapportée à ses lignes asymptotiques.

On a ainsi, par une voie simple et naturelle, le résultat connu: *En relation avec tout couple de surfaces applicables, rapportées au réseau commun, on a une surface rapportée à ses lignes asymptotiques.* (Voir Darboux, Tome IV).

279. Cela étant, on peut construire un système d'équations linéaires aux dérivées partielles qui admet comme solutions ξ, η, X, Y, Z, T.

On peut déterminer en effet six fonctions a, b, l, m, l_1 et m_1 telles que l'on ait

$$\xi_u = a\xi + b\eta + lX + mY + l_1Z + m_1T.$$

On remarquera que de (4) on tire $\Sigma\xi\xi_u = 0$ et l'equation précédente, en vertu de (4), (5) et (I), donne

$$l_1 = 0.$$

De la même manière de

$$\Sigma\xi\eta_u + \Sigma\eta\xi_u = 0$$

Digitized by Google

ou $\Sigma\eta\xi_u = 0$ on tire

$$m_1 = 0.$$

Sans entrer dans plus de détails le système cherché est de la forme

$$(II)\quad \begin{cases} \xi_u = a\xi + b\eta + l\mathrm{X} + m\mathrm{Y}, & \xi_v = b'\eta; \\ \eta_u = c\xi, & \eta_v = c'\xi + d'\eta + l'\mathrm{X} + m'\mathrm{Y}; \\ \mathrm{X}_u = a\xi + \beta\eta + p\mathrm{X} - m\mathrm{Z}, & \mathrm{X}_v = a\xi + \beta'\eta + p'\mathrm{X} - m'\mathrm{Y}; \\ \mathrm{Y}_u = \gamma\xi + \delta\eta - p\mathrm{Y} - l\mathrm{Z}, & \mathrm{Y}_v = \gamma'\xi + \delta'\eta - p'\mathrm{Y} - l'\mathrm{T}; \\ \mathrm{Z}_u = f\eta - \gamma\mathrm{X} - a\mathrm{Y} - a\mathrm{Z} - c\mathrm{T}, & \mathrm{Z}_v = f'\eta - \gamma'\mathrm{X} - a\mathrm{Y} - c'\mathrm{T}; \\ \mathrm{T}_u = -f\xi - \delta\mathrm{X} - \beta\mathrm{Y} - b\mathrm{Z}, & \mathrm{T}_v = -f'\xi - \delta'\mathrm{X} - \beta'\mathrm{Y} - b'\mathrm{Z} - d'\mathrm{T}. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité n'entrant pas directement dans nos démonstrations, nous les laissons de côté.

280. On peut faire voir facilement que l'intégration du système (II) conduit à un réseau nul de E_6, donc à un couple de surfaces applicables.

A cet effet je remarque que le système jouit de la propriété suivante:

Etant données deux intégrales $\xi, \eta, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{T}$ *et* $\xi', \eta', \mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}', \mathrm{T}'$ *du système, on a la relation*

$$\xi\mathrm{Z}' + \mathrm{Z}\xi' + \eta\mathrm{T}' + \mathrm{T}\eta' + \mathrm{XY}' + \mathrm{YX}' = \text{const.},$$

qui se réduit, dans le cas où les intégrales se confondent, à

$$\xi\mathrm{Z} + \eta\mathrm{T} + \mathrm{XY} = \text{const.}$$

Comme le système (II) admet six intégrales linéairement indépendantes ξ_i, η_i, X_i, Y_i, Z_i, T_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, il est aisé de voir, que, d'après la proposition précédente, on peut les choisir, c'est-à-dire on peut les remplacer par des combinaisons linéaires telles que l'on ait les relations

$$(III)\quad \xi_i\mathrm{Z}_i + \eta_i\mathrm{T}_i + \mathrm{X}_i\mathrm{Y}_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, 6$$
$$\xi_i\mathrm{Z}_k + \xi_k\mathrm{Z}_i + \eta_i\mathrm{T}_k + \eta_k\mathrm{T}_i + \mathrm{X}_i\mathrm{Y}_k + \mathrm{X}_k\mathrm{Y}_i = 0, \quad i \neq k,$$

dont on tire ensuite les relations (4) et (I). On a en effet de (III)

$$\mathrm{Z}_k\Sigma\xi^2 + \xi_k\Sigma\xi\mathrm{Z} + \mathrm{T}_k\Sigma\xi\eta + \eta_k\Sigma\xi\mathrm{T} + \mathrm{Y}_k\Sigma\xi\mathrm{X} + \mathrm{X}_k\Sigma\xi\mathrm{Y} = \xi_k,\ k = 1, 2, \ldots, 6$$

ou encore

$$\mathrm{Z}_k\Sigma\xi^2 + \xi_k(\Sigma\xi\mathrm{Z} - 1) + \mathrm{T}_k\Sigma\xi\eta + \eta_k\Sigma\xi\mathrm{T} + \mathrm{Y}_k\Sigma\xi\mathrm{X} + \mathrm{X}_k\Sigma\xi\mathrm{Y} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 6$$

d'où

$$\Sigma\xi^2 = 0,\ \Sigma\xi\mathrm{Z} = 1,\ \Sigma\xi\eta = 0,\ \Sigma\xi\mathrm{T} = 0,\ \Sigma\xi\mathrm{X} = 0,\ \Sigma\xi\mathrm{Y} = 0$$

et on obtiendra de la même manière les autres.

En posant maintenant

$$x_u = k\xi, \quad x_v = k'\eta,$$

où

$$(6)\quad k_v = ck', \quad k'_u = b'k,$$

on obtient un réseau nul de E_6 (en réalité une infinité de réseaux à tangentes

Digitized by Google

parallèles, chaque réseau étant déterminé par un couple de fonctions k et k', vérifiant le système (6), dont l'équation de Laplace correspondante est

$$x_{uv} = \frac{c\,k'}{k}\,x_u + \frac{b'\,k}{k'}\,x_v.$$

281. Le réseau nul (x) étant défini, nous allons déterminer un autre réseau nul (x') de E_6, qui jouisse de plus de la propriété que ses tangentes coupent les tangentes correspondantes de (x).

On devra avoir entre les coordonnées $x^{(i)}$ et $x'^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ les relations

$$(7)\quad x' + \lambda'_1\,x'_u = x + \lambda_1\,x_u, \quad x' + \lambda'_2\,x'_v = x + \lambda_2\,x_v$$

λ'_1, λ_1, λ'_2, λ_2 étant des fonctions soumises à des conditions que nous établirons dans la suite et qui résultent de la nature du problème.

On peut évidemment déterminer six fonctions A, B, ..., F telles qu'on ait

$$(8)\quad x' = x + \mathrm{A}\,\xi + \mathrm{B}\,\eta + \mathrm{C}\,\mathrm{X} + \mathrm{D}\,\mathrm{Y} + \mathrm{E}\,\mathrm{Z} + \mathrm{F}\,\mathrm{T}.$$

Il s'agit de choisir ces fonctions de manière que les (7) soient vérifiées et que le réseau (x') soit, comme (x), nul.

On a d'abord de (7), en posant pour abréger

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}\,\xi + \mathrm{B}\,\eta + \mathrm{C}\,\mathrm{X} + \mathrm{D}\,\mathrm{Y} + \mathrm{E}\,\mathrm{Z} + \mathrm{F}\,\mathrm{T}$$

les relations

$$(9)\quad \mathrm{P}_u = k\frac{\lambda_1 - \lambda'_1}{\lambda'_1}\,\xi - \frac{1}{\lambda'_1}\,\mathrm{P}, \quad \mathrm{P}_v = k'\,\frac{\lambda_2 - \lambda'_2}{\lambda'_2}\,\eta - \frac{1}{\lambda'_2}\,\mathrm{P}$$

et de là

$$(10)\quad x'_u = k\,\frac{\lambda_1}{\lambda'_1}\,\xi - \frac{1}{\lambda'_1}\,\mathrm{P}, \quad x'_v = k'\,\frac{\lambda_2}{\lambda'_2}\,\eta - \frac{1}{\lambda'_2}\,\mathrm{P}.$$

En remarquant qu'en vertu de (4) et (I) on a

$$\Sigma\,\xi\,\mathrm{P} = \mathrm{E}, \quad \Sigma\,\eta\,\mathrm{P} = \mathrm{F}, \quad \Sigma\,\mathrm{P}^2 = 2\,(\mathrm{A}\,\mathrm{E} + \mathrm{B}\,\mathrm{F} + \mathrm{C}\,\mathrm{D}),$$

les relations

$$\Sigma\,x'^2_u = \Sigma\,x'_u\,x'_v = \Sigma\,x'^2_v = 0,$$

qui expriment que le réseau (x') est nul, deviennent

$$(11)\quad \mathrm{A}\,\mathrm{E} + \mathrm{B}\,\mathrm{F} + \mathrm{C}\,\mathrm{D} = k\,\lambda_1\,\mathrm{E} = k'\,\lambda_2\,\mathrm{F}.$$

Si nous calculons de (10) la dérivée x'_{uv}, on trouve deux valeurs qui doivent être identiques. De cette identité on tire trois relations, dont nous écrivons d'abord la suivante

$$\left(\frac{1}{\lambda'_1}\right)_v = \left(\frac{1}{\lambda'_2}\right)_u ;$$

Digitized by Google

on peut donc poser

$$(12)\quad \lambda'_1 = -\frac{R'}{R'_u},\quad \lambda'_2 = -\frac{R'}{R'_v},$$

R′ étant une fonction encore inconnue.

Il nous reste à écrire deux relations, auxquelles on dont ajouter la relation qui exprime que x' vérifie une équation de Laplace sans terme en x'. Cela fait trois relations, dont on tire d'abord les deux suivantes

$$\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)_u - \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)_v - \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{c\,k'}{k}\cdot\frac{1}{\lambda_1} + \frac{b'k}{k'}\cdot\frac{1}{\lambda_2}.$$

ce qui conduit à poser

$$(13)\quad \lambda_1 = -\frac{R}{R_u},\quad \lambda_2 = -\frac{R}{R_v},$$

R étant une fonction qui, en vertu des relations précédentes, vérifie l'équation

$$(14)\quad R_{uv} = \frac{c\,k'}{k}R_u + \frac{b'\,k}{k'}R_v,$$

c'est-à-dire R est une solution de l'équation de Laplace qui correspond à (x).

Il nous reste à écrire une seule relation, à laquelle on peut donner la forme

$$(15)\quad \left(\frac{R}{R'}\right)_{uv} = \frac{c\,k'}{k}\frac{R_u}{R_v}\cdot\left(\frac{R}{R'}\right)_v + \frac{b'\,k}{k'}\frac{R_v}{R_u}\left(\frac{R}{R'}\right)_u.$$

On peut prouver à l'aide de cette relation que R′ est une solution de l'équation de Laplace qui correspond à (x').

282. Les relations (12) et (13) déterminent les fonctions λ_1, λ_2, λ'_1 et λ'_2 à l'aide des fonctions R et R′ assujetties à vérifier les relations (14) et (15).

Nous nous occupons maintenant à déterminer les fonctions A, B, ..., F de l'expression (8) de x.

A cet effet nous remplacerons dans (9) la fonction P par sa valeur, en tenant compte du système (II). On obtiendra ainsi deux égalités linéaires et homogènes en ξ, η, ..., Z et T, qui doivent être des identités, ce qui donne un système de 12 équations pour A, B, ..., F.

On simplifie ce système en remplaçant λ_1, λ_2, λ'_1, λ'_2 par leurs valeurs et en posant

$$A = R'\,A',\quad B = R'\,B',\quad \ldots,\quad F = R'\,F'.$$

Digitized by Google

On obtiendra ainsi le système

$$\text{IV}\quad\begin{cases}
A'_u + a\,A' + c\,B' + \alpha\,C' + \gamma\,D' - f\,F' = -\dfrac{k}{R_u}\left(\dfrac{R}{R'}\right)_u, \\
A'_v - c'\,B' + a'\,C' + \gamma'\,D' - f'\,F' = 0; \\
B'_u + b\,A' + \beta\,C' + \delta\,D' + f\,E' = 0, \\
B' + b'\,A' + d'\,B' + \beta'\,C' + \delta'\,D' + f'\,E' = -\dfrac{k'}{R_v}\left(\dfrac{R}{R'}\right)_v; \\
C'_u + l\,A' + p\,C' - \gamma\,E' - \delta\,F' = 0, \quad C'_v + l'\,B' + p'\,C' - \gamma'\,E' - \delta'\,F' = 0; \\
D'_u + m\,A' - p\,D' - \alpha\,E' - \beta\,F' = 0, \quad D'_v + m'\,B' - p'\,D' - \alpha'\,E' - \beta'\,F' = 0; \\
E'_u - m\,C' - l\,D' - a\,E' - b\,F' = 0, \quad E'_v - b'\,F' = 0 \\
F'_u - c\,E' = 0, \qquad\qquad F'_v - m'\,C' - l'\,D' - c'\,E' - d'\,F' = 0.
\end{cases}$$

Ce système linéaire par rapport aux fonctions inconnues A', B', ..., F', n'est pas essentiellement différent du système (II). Il n'y a que deux équations qui ont deux termes en plus. Les conditions d'intégrabilité sont les mêmes; on a en plus la relation (15).

Il faut ajoûter au système (IV) les relations (11) qui, avec les notations actuelles, deviennent

$$A'\,E' + B'\,F' + C'\,D' = -\frac{R}{R'}\cdot\frac{k\,E'}{R_u} = -\frac{R}{R'}\cdot\frac{k'\,F'}{R_v},$$

d'où l'on tire

$$R_u = h.\ k\,E', \quad R_v = h.\ k'\,F',$$

h étant une fonction qu'il faut déterminer de manière que (14) soit vérifiée. On obtient ainsi $h = \text{const.}$ On poura donc prendre $h = 1$.

On a ainsi

$$(16)\quad R_u = k\,E', \quad R_v = k'\,F'$$

$$(17)\quad A'\,E' + B'\,F' + C'\,D' = -\frac{R}{R'}$$

283. Cela étant établi, on peut définir le passage de (x) à (x') de la manière suivante

La solution R de (14) étant prise d'une manière arbitraire, le système (IV) peut être résolu sans quadrature.

Les relations (16) définissent en effet E' et F', qui en vertu de (14) satisfont aux équations

$$F'_u - c\,E' = 0, \quad E'_v - b'F' = 0$$

de (IV).

Digitized by Google

Les équations

$$E'_u - m\,C' - l\,D' - a\,E' - b\,F' = 0$$
$$F'_v - m'\,C' - l'\,D' - c'\,E' - d'\,F' = 0$$

déterminent s $l\,m' - m\,l' \neq 0$ C' et D'. Alors

$$D'_u + m\,A' - p\,D' - \alpha\,E' - \beta\,F' = 0,$$
$$D'_v + m'\,B' - p'\,D' - \alpha'\,E' - \beta'\,F = 0$$

donnent A' et B'.

Les autres équations de (IV) sont vérifiées en vertu des conditions d'intégrabilité, de l'équation (14) et (17). Cette dernière relation définit sans quadrature la fonction R', qui vérifie, en vertu du système (IV), la relation (15).

Le passage du réseau nul (x) au réseau nul (x') est par conséquent complètement défini par la solution arbitraire R de (14).

Cette transformation des couples de surfaces applicables est au fond la même que celle que nous avons trouvée par la transformation de Ribaucour.

Nous avons supposé dans le raisonnement précédent

$$l\,m' - m\,l' \neq 0.$$

Si l'on avait

$$l\,m' - m\,l' = 0$$

le système (II) prouverait que l'on aurait une relation linéaire et homogène entre ξ_u, η_v, ξ et η, c'est-à-dire entre x_{uu}, x_{vv}, x_u et x_v et le réseau (x) appartiendrait à un E_3, ce qui n'est pas en général.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

Préface 3

INTRODUCTION. — GÉOMÉTRIE DES ESPACES À PLUSIEURS DIMENSIONS

I. Espaces métriques euclidiens. Espaces projectifs 7
II. Espaces linéaires d'un E_{n-1} 9
III. Espaces quadratiques et dualité dans un E_{n-1} 12
IV. Coordonnées d'une droite de E_3. Complexes. congruences, séries linéaires et ensembles linéaires 15
V. Coordonnées pentasphériques. Sphères. Cercles 23
VI. Courbes dans un espace projectif E_{n-1} 28
VII. Surfaces réglées d'un E_r 37
VIII. Surfaces dans un E_{n-1} 43

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I. RÉSEAUX

I. Réseaux tracés sur une surface du second ordre 49
II. Réseaux dans un E_{n-1} 50
III. Surfaces ayant des réseaux 52
IV. Equation de Laplace 56

CHAPITRE II. TRANSFORMATIONS DES RÉSEAUX

I. Transformation de Laplace 61
II. Réseaux et congruences conjugués et harmoniques 66

CHAPITRE III. RÉSEAUX À INVARIANTS ÉGAUX

I. Théorème de Koenigs 77
II. Transformation de Koenigs-Moutard 79
III. Théorème de Bianchi 86

CHAPITRE IV. RÉSEAUX QUADRATIQUES

I. Transformation de Ribaucour 92
II. Théorème de permutabilité 95
III. Réseaux quadratiques à invariants égaux 97
IV. Transformations de Darboux et de Bianchi 106

Digitized by Google

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE V. SUITES DE LAPLACE

Pages

I. Définition et représentation 115
II. Suites de Laplace inscrites dans une suite donnée 117
III. Suites dérivées 118
IV. Suites circonscrites à une suite donnée 120
V. Suites polaires réciproques 121
VI. Suite de Laplace d'un réseau quadratique 124

CHAPITRE VI. SUITES TERMINÉES

I. Suites terminées dans un sens 128
II. Suites terminées dans les deux sens 134
III. Suites terminées à invariants égaux 149

CHAPITRE VII. SUITES PÉRIODIQUES

I. Définition 171
II. Suite polaire d'une suite périodique 175
III. Suites périodiques inscrites et circonscrites à une suite périodique. 180

CHAPITRE VIII. SUITES PÉRIODIQUES À INVARIANTS ÉGAUX

I. Définition et exemples 183
II. Théorème de Wilczynski 186
III. Transformations des suites à invariants égaux 190

CHAPITRE IX. SUITES DE LAPLACE AUTOPROJECTIVES

I. Définition et exemples 196
II. Suites inscrites dans une suite autoprojective 205
III. Suite polaire d'une suite autoprojective 206

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE X. LIGNES DE COURBURE

I. Historique et définition 213
II. Image d'un réseau orthogonal 216
III. Transformations d'un réseau orthogonal 219
IV. Théorème de Darboux 221
V. Systèmes cycliques 223

CHAPITRE XI. SURFACES ISOTHERMIQUES

I. Historique et définition 226
II. Transformation de Darboux 229
III. Transformation de Christoffel 236
IV. Surfaces à lignes de courbure sphériques 239

CHAPITRE XII. LIGNES ASYMPTOTIQUES

I. Historique et définition 242
II. Représentation affine des surfaces 243
III. Représentation en coordonnées de droites. Image 256

Digitized by Google

CHAPITRE XIII. CONGRUENCES W

Pages

I. Historique et définition 258
II. Image et théorème de Darboux 260
III. Réseaux R 263
IV. Suites de Laplace autodérivées 268

CHAPITRE XIV. SUR CERTAINS COUPLE DE SURFACES

I. Problème de M. Guichard 273
II. Une classe spéciale de surfaces 275
III. Sur les couples de surfaces applicables 283

Digitized by Google

IMPR.
CVLTVRA
NAȚIONALĂ
BUCAREST
1923

Digitized by Google

LEI
100
LEI
20

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE STAMPED BELOW

AN INITIAL FINE OF 25 CENTS WILL BE ASSESSED FOR FAILURE TO RETURN THIS BOOK ON THE DATE DUE. THE PENALTY WILL INCREASE TO 50 CENTS ON THE FOURTH DAY AND TO $1.00 ON THE SEVENTH DAY OVERDUE.

JUN 1 1937
JUN 15 1937
MAY 30 1938
JUL 28 1938
JAN 4 1939
MAR 29 1939
DEC 1 1942

LD 21-100m-8,'34

Digitized by Google

622422 QA660
Tzitzeica, G. T9
...Géometrie
differentialle projective
des reaseaux.

Dec.29,'42 Russell DEC 24 1942

622422
QA660
T9

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google